2D Graphik: Fouriertransformation

Vorlesung „2D Graphik”

Andreas Butz, Otmar Hilliges

Freitag, 18. November 2005

Themen heute

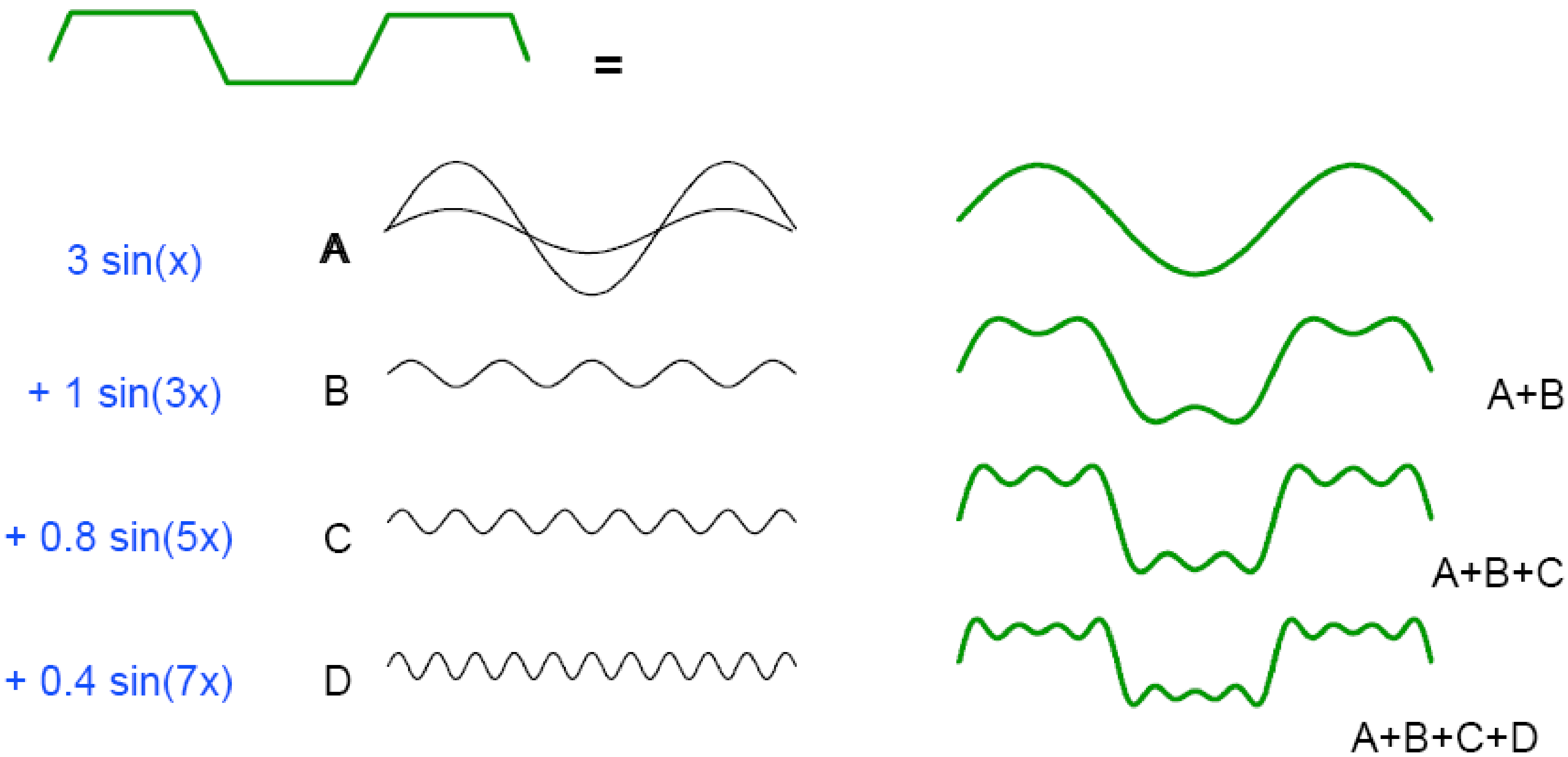
- Fouriertransformation
  - Grundidee
  - Konstruktion der Fourier-Basis
  - Phase und Amplitude
  - Eigenschaften der FT
  - Konvolution und Korrelation im Frequenzraum
- Diskrete Cosinus-Transformation
  - Basis der DCT

Fourier

- Jean Baptiste Jposeph Fourier (1768-1830)
- Französischer Physiker und Mathematiker
- Erfinder der Fouriertransformation

Fouriertransformation: Grundidee

- Beschreibe beliebige Funktion als gewichtete Summe periodischer Grundfunktionen (Basisfunktionen) mit untersch. Frequenz



Periodische Funktionen

Parameter

A Amplitude: Intensität des Signals

φ Phase: Verschiebung gegenüber dem Ursprung

verschiedene Größen zur Beschreibung der "Frequenz" [Einheit]

zeitlich f(t)

T Periodendauer [s]

f Frequenz $f = 1/T$ [1/s=Hz]

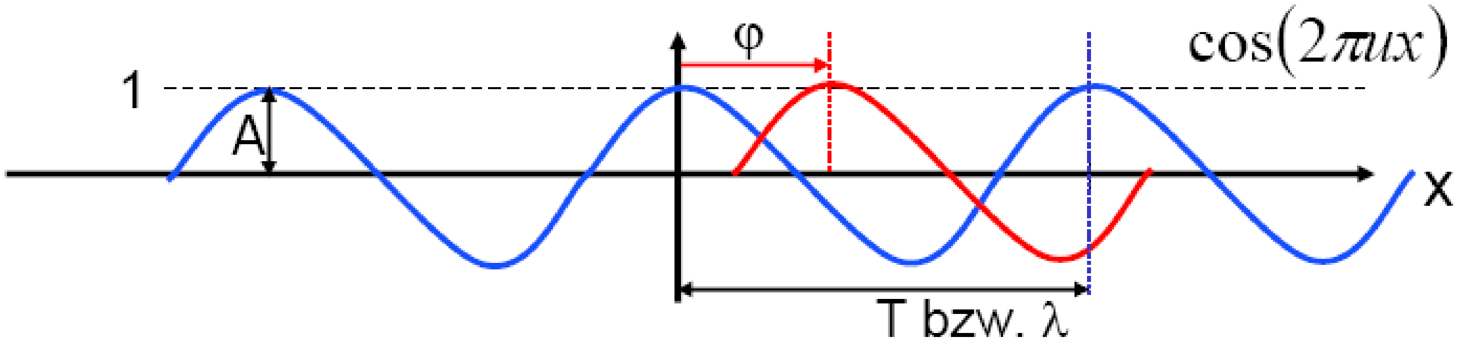
ω Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$

räumlich f(x)

λ Wellenlänge [m]

f Raumfrequenz $f = 1/\lambda$ [1/m]

k Wellenzahl $k=2\pi/\lambda$



Fouriers Theorem

- **Jede beliebige** periodische **Funktion** läßt sich darstellen als **Summe von cos** und **sin** Funktionen unterschiedlicher Frequenzen.

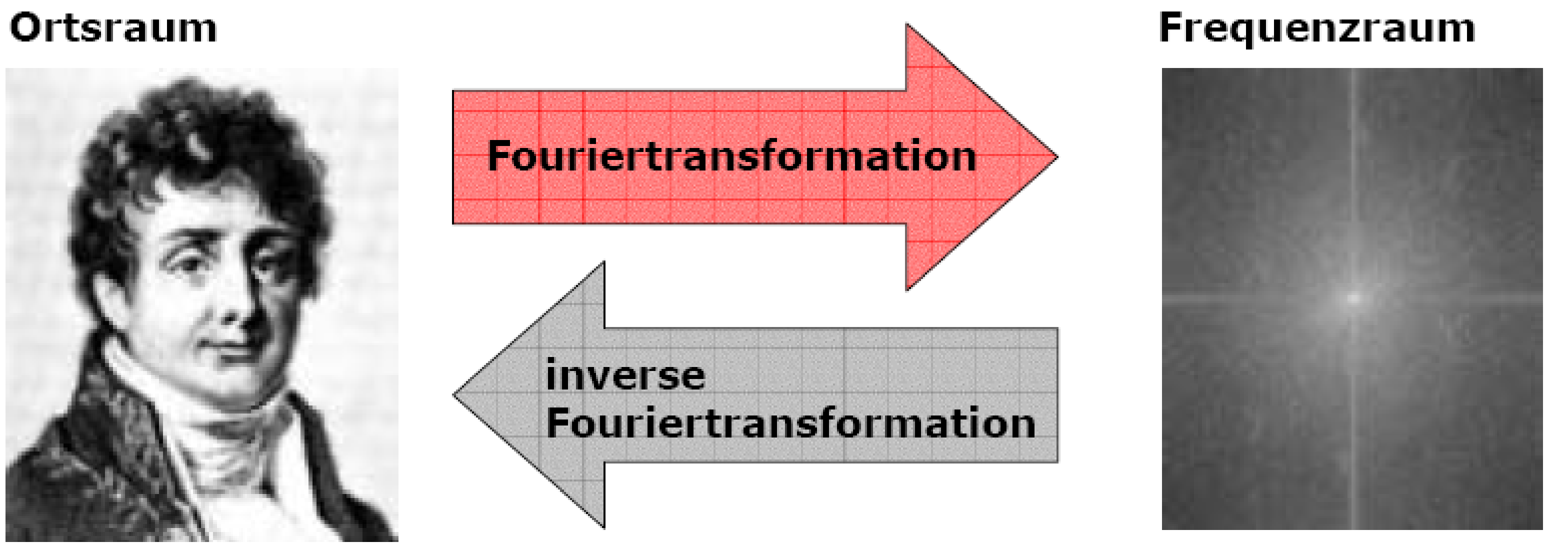
- 1. Ist die Funktion nicht periodisch, aber auf einen bestimmten Definitionsbereich beschränkt, so kann man diesen Bereich einfach kopieren (periodisch fortsetzen) und hat damit wieder eine periodische Funktion.
- 2. Ein Bild kann man als Zeilen und Spalten von nichtperiodischen Funktionen auffassen. Man kann also auch ein Bild fouriertransformieren.

Motivation (1)

- Manche Operationen sind im Ortsraum (d.h. auf den Pixeln des Bildes) schwer
  - Herausfiltern bestimmter Frequenzen
  - Beseitigung störender Details
  - Konvolution, Korrelation
- Ziel: übertrage Bild in einen Raum, in dem diese Operationen leichter sind
  - z.B. Zerlegung des Bildes in Frequenzen
  - Rückweg muss möglich sein!
  - Verschiedene Möglichkeiten, gleiches Prinzip

Motivation (2)

- Bisher: Darstellung des Bildes im **Ortsraum** durch den Grauwert an einem bestimmten Ort
- Jetzt: Darstellung im **Frequenzraum** durch cos und sin Funktionen verschiedener Frequenzen
- Ein Bild kann eindeutig und vollständig in beiden Räumen dargestellt werden.



Fouriertransformation: Eigenschaften

- Transformation: verändert eine Funktion nicht, sondern stellt sie nur anders dar
- Transformation ist umkehrbar → inverse Fouriertransformation

- Analog zum Basiswechsel in der Vektorrechnung

Exkurs: Vektorrechnung

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

bilden eine Basis b_1 des R^3
sind paarweise orthogonal
haben Länge 1

$$\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

bilden ebenfalls eine Basis b_2 des R^3
sind ebenfalls paarweise orthogonal
Haben ebenfalls Länge 1

$$\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ist orthogonal und normiert
(d.h. $M^T = M^{-1}$)
Ist Basiswechselmatrix
von b_1 nach b_2

Anschaulich: Basisvektoren eines Bildes

1	0	1	0

$$
\begin{array}{rl}
= 1\ * & \boxed{1\ \ 0\ \ 0\ \ 0} \\
+\ 0\ * & \boxed{0\ \ 1\ \ 0\ \ 0} \\
+\ 1\ * & \boxed{0\ \ 0\ \ 1\ \ 0} \\
+\ 0\ * & \boxed{0\ \ 0\ \ 0\ \ 1}
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}
$$

bilden eine Basis des R^4
sind paarweise orthogonal
haben Länge 1

- Wahl anderer Basisvektoren ➔ Transformation mittels Basiswechsel
- Basiswechselmatrix vom Rang der Pixelanzahl

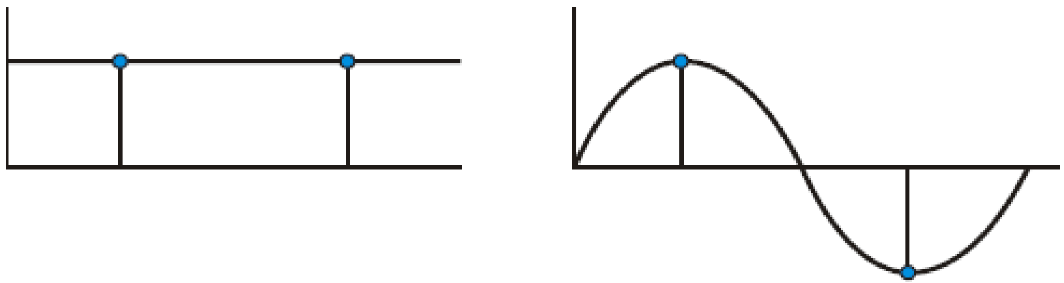
Orthogonale Funktionen

- Seien f_1 und f_2 Funktionen, die an N Stellen abgetastet sind (also N-dim. Vektoren)
- f_1 und f_2 sind orthogonal, falls gilt:

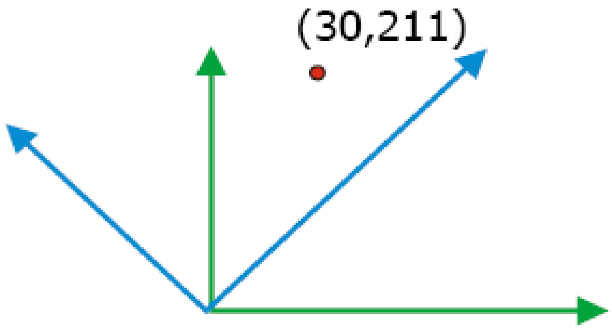
$$f_1 * f_2 = \sum_{k=0}^{N-1} f_1(k)\, f_2(k) = 0$$

- D.h. das Skalarprodukt der zugehörigen Vektoren ist 0
- N paarweise orthogonale Funktionen $f_1 \ldots f_N$ bilden damit eine orthogonale Basis des N-dim. Raums
- Transformationen zwischen orthogonalen Basen sind immer umkehrbar

Orthogonale Funktionen



Basis:
(1, 1)
(1, -1)



Transformation:

$$(30,211) * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (241, -181)$$

Rücktransformation:

$$(241,-181) * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T = (60, 422)$$

Anmerkung:

Das Resultat der Rücktransformation muss skaliert werden, weil die Basis nicht normiert ist.

Orthogonale Funktionstransformationen

- Betrachte abgetastete Funktionen wie Vektoren
- Finde neue geeignete orthogonalen Basis
- Üblicherweise Basisfunktionen, die eine Bedeutung bzgl. der betrachteten Eigenschaft haben
  - Fourier-Basis: komplexe, periodische Funktionen
  - Kosinusbasis: Kosinusfunktionen
- Transformiere Bild in diese Basis $\vec{y} = A\vec{x}$
- Betrachte es dort
- Transformiere zurück $\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$

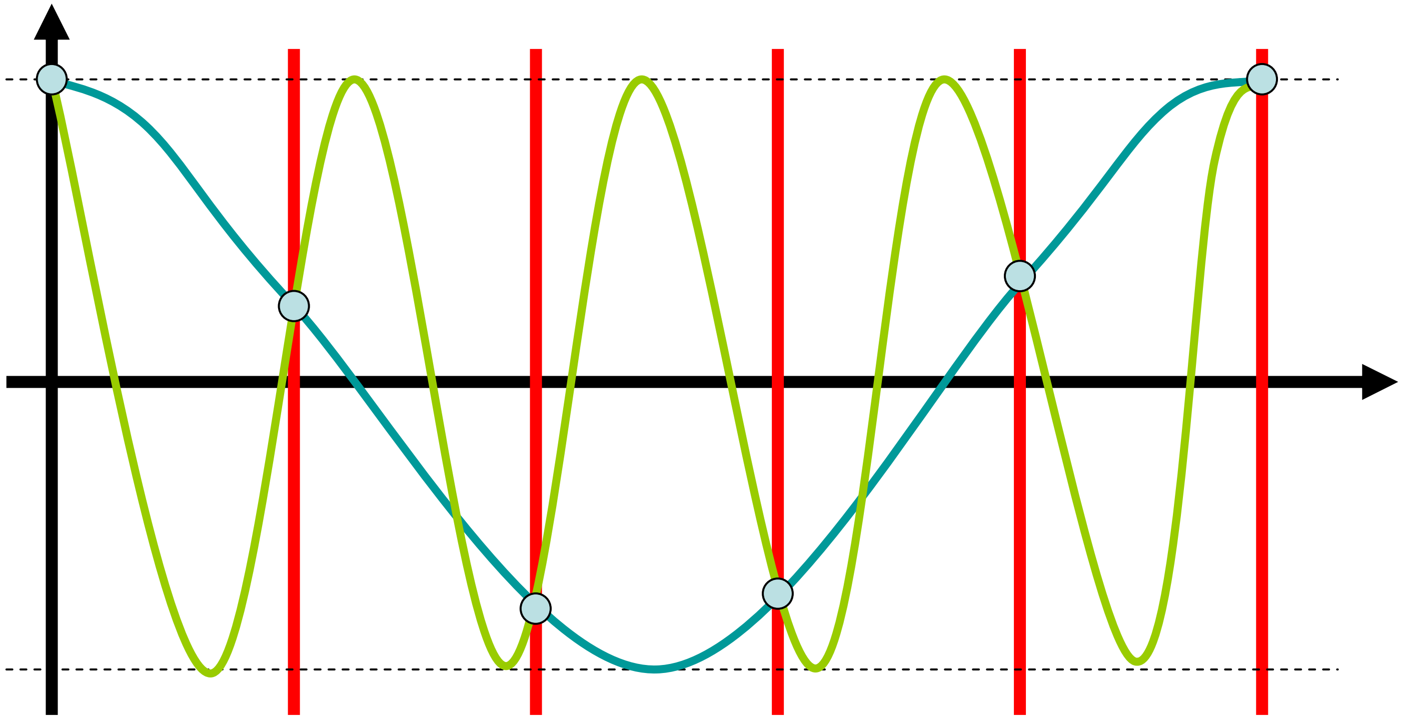
Die Fourierbasis (1)

- Ausgangspunkt: Bildzeile mit N Pixeln
- 1. Versuch: wähle Kosinusfunktionen

$$\cos(u_1 n), \cos(u_2 n), \ldots \cos(u_N n)$$

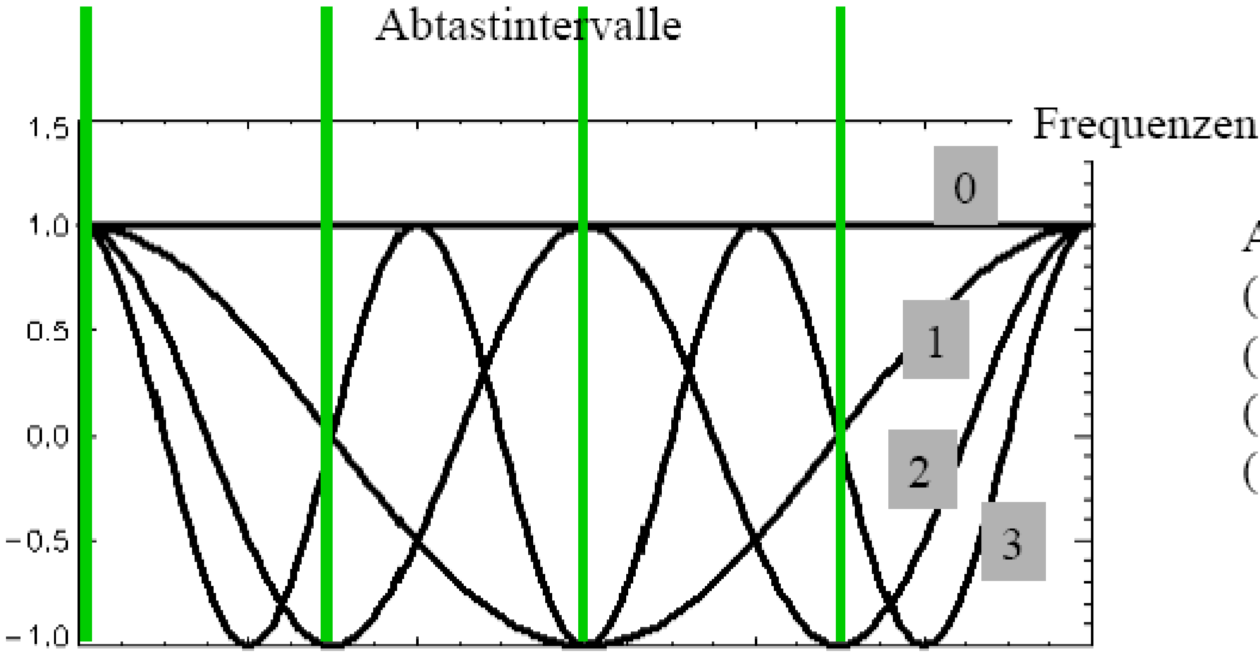
- Wobei u_1 … u_N ganzzahlige Vielfache von $u_0 = 2\pi/N$

Fourierbasis (2)



- N=5, $u_i = 1$, $u_j = 4 = N - u_j$
- Problem: falls $u_i = N - u_j$ ist, sind die Abtastungen gleich
- ➔ nur N/2 Funktionen verfügbar, keine Basis
- Siehe auch Shannon-Nyquist Theorem, Aliasing

Fourierbasis (3)



Abgetastete Kosinuswellen:

(1 1 1 1)

(1 0 –1 0)

(1 –1 1 –1)

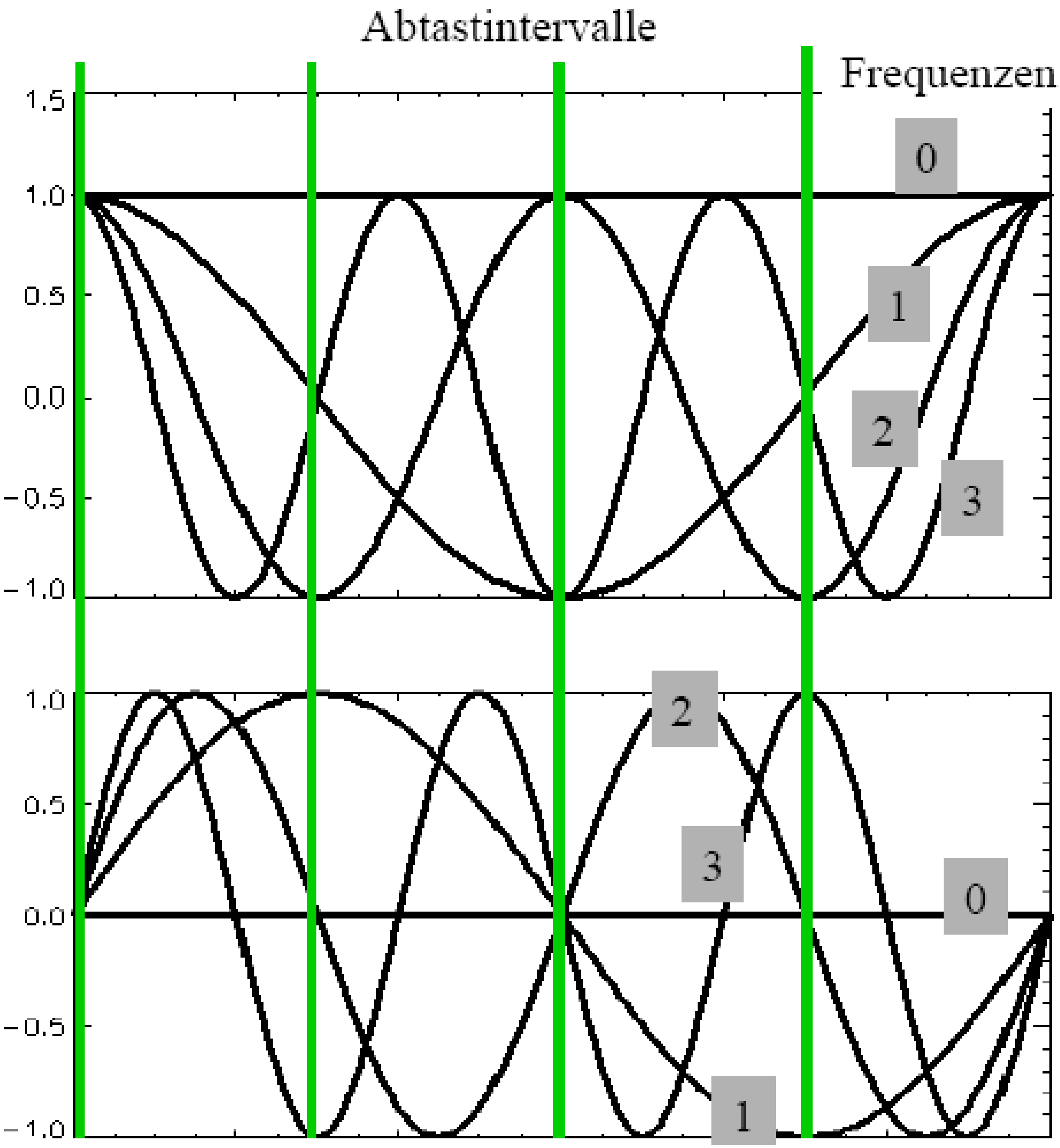
(1 0 –1 0)

Lösungen:

– frequenzverschobene Perioden (DCT).

– komplexe periodische Funktionen (FT).

Basis-funktions-paare



Abgetastete Kosinuswellen:

(1 1 1 1)

(1 0 –1 0)

(1 –1 1 –1)

(1 0 –1 0)

Abgetastete Sinuswellen:

(0 0 0 0)

(0 1 0 –1)

(0 0 0 0)

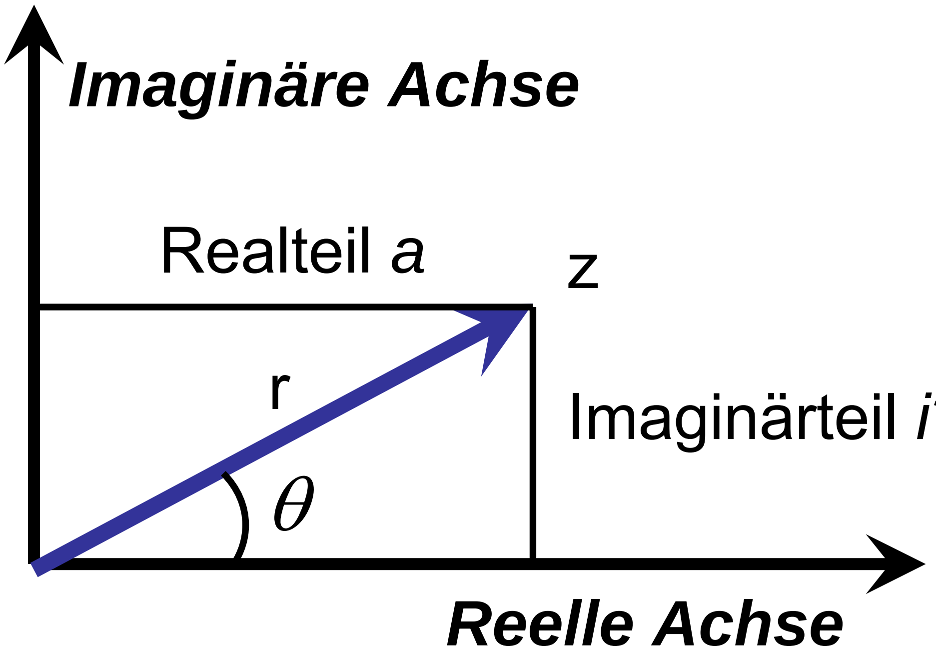
(0 –1 0 1)

Erinnerung: komplexe Zahlen

- Im Bereich der reellen Zahlen gibt es keine Lösung für $x^2 = -1$
  - Einführung der imaginären Zahlen
  - i: Lösung der Gleichung $x^2 = -1$
- Die Gruppe der reellen und imaginären Zahlen nennt man *komplexe* Zahlen

- Komplexe Zahl *z*: $\boldsymbol{z = a + i*b}$, wobei a und b reell sind

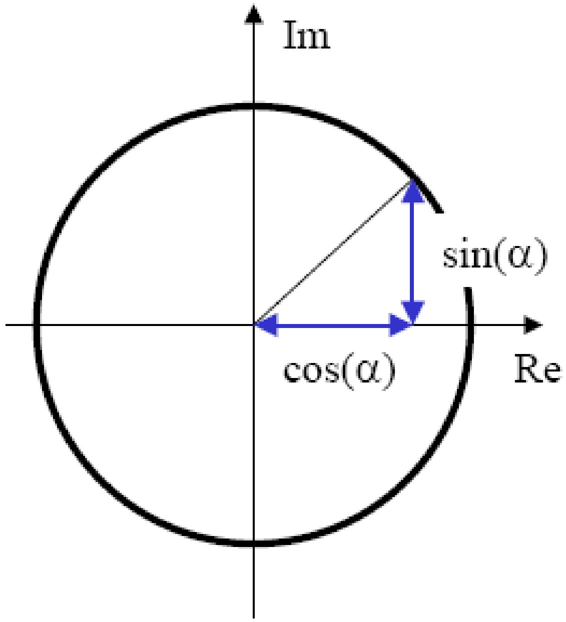
Erinnerung: komplexe Zahlen

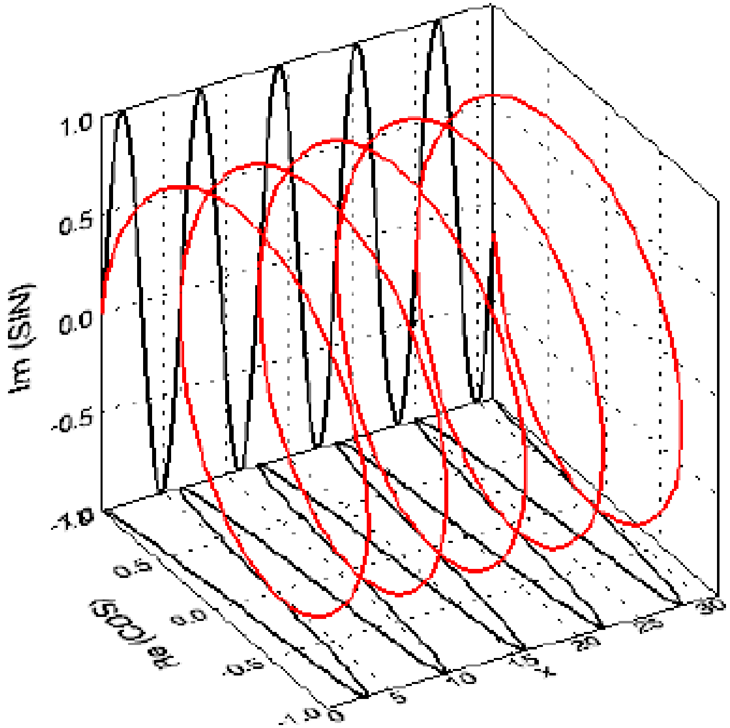


$$z = a + ib = r \cdot e^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$$

Komplexe periodische Funktionen

$$\cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)$$



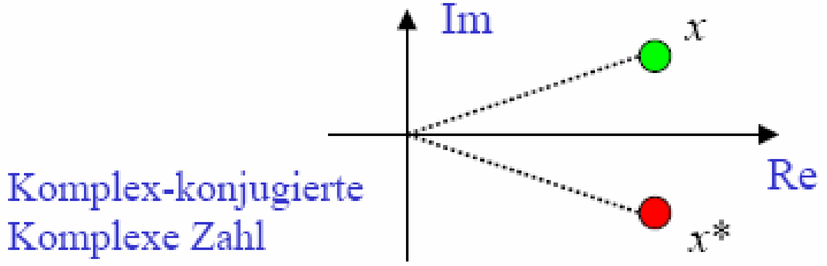


Alle Werte für komplexe Zahlen der Form $\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$ liegen auf einem Kreis mit Abstand 1 in der komplexen Ebene.

Komplexes Skalarprodukt

Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren mit komplexen Elementen:

- Summe der Produkte der Komponenten des ersten Vektors mit der komplex-konjugierten Komponenten des zweiten Vektors.
- Die komplex-konjugierte zu $x=a+i\cdot b$ ist $x^*=a-i\cdot b$.



Skalarprodukt:

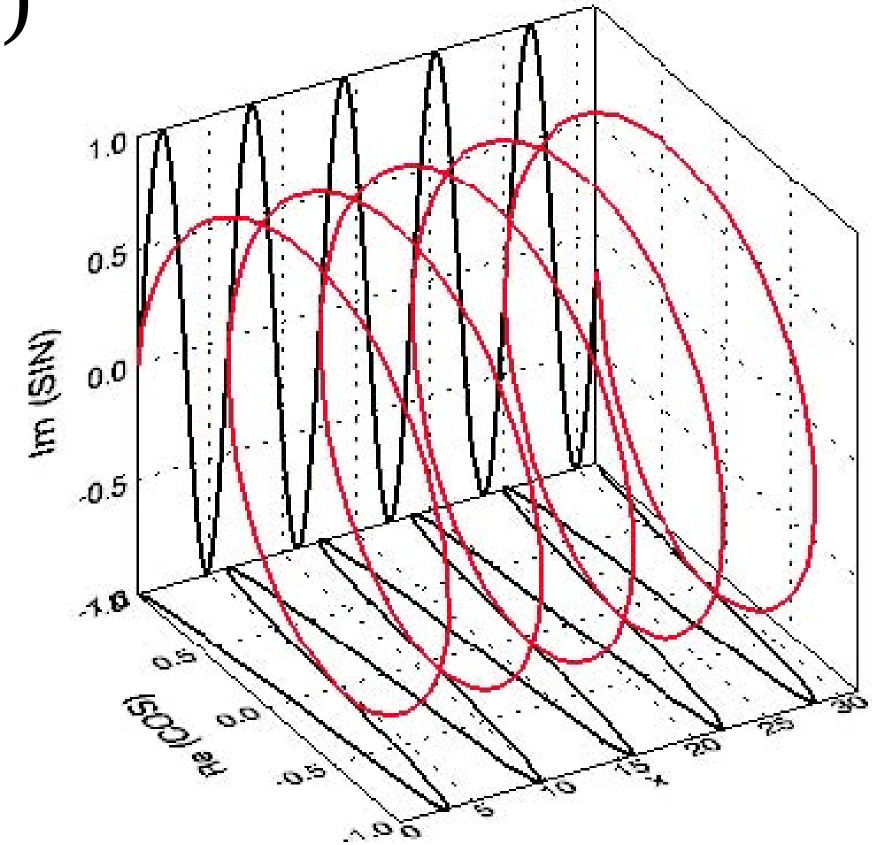
$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot y_i^* = \sum_{i=0}^{N-1} (\mathrm{Re}(x_i) + i\,\mathrm{Im}(x_i))(\mathrm{Re}(y_i) - i\,\mathrm{Im}(y_i))$$

Fourierbasis (3)

- 2. Versuch: wähle komplexe Funktionen

$$f = \cos(un) + i\sin(un)$$

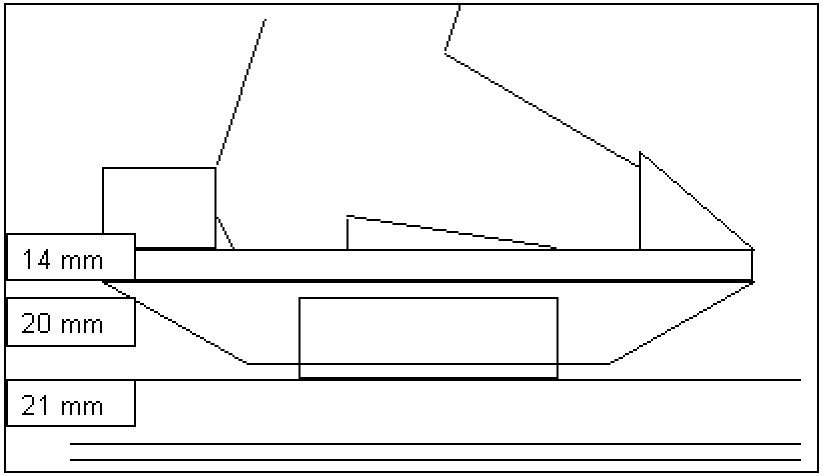
- Wobei u ein ganzz. Vielf. von $u_0 = 2\pi/N$
- → N verschiedene Funktionen
- Ist eine Basis



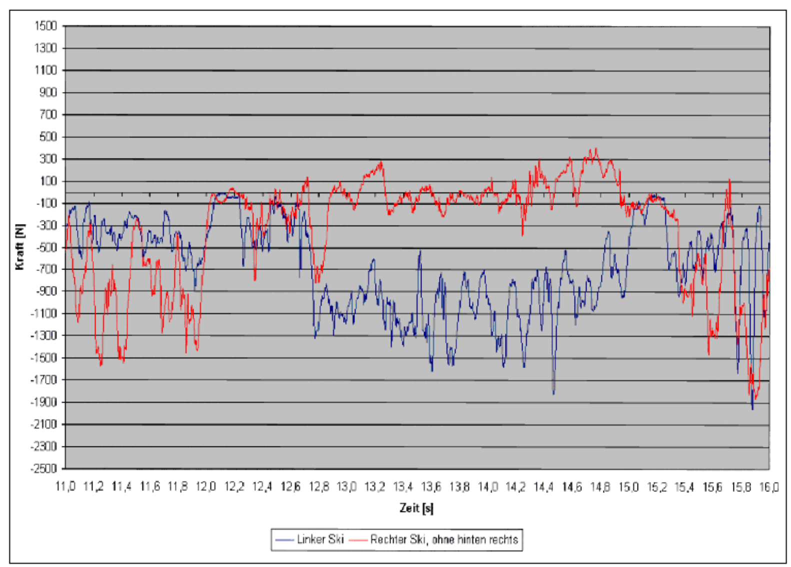
Belastungen beim Carving

Technikanalyse und Kräfte beim Carving

Diplomarbeit zur Erlangung des Eidg. Turn- und Sportlehrerdiploms II



- „Die erheblichen Schwingungen erlauben es auch nicht, eindeutige Aussagen bezüglich absoluter Kräfte zu machen. Eine Fourier- Analyse hätte diesbezüglich eine Vereinfachung, […] der Diagrammauswertung gegeben.“



Repräsentation als Exponentialfunktion

- Taylorreihenentwicklung für Kosinus und Sinus:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

- Taylorreihenentwicklung für e^{ix}:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \Rightarrow e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots$$

- Es gilt daher wegen $i^2 = -1$: $\cos(x)+i\cdot\sin(x) = e^{ix}$
- Phasenverschiebung α kann in komplexen Funktionen als Multiplikation ausgedrückt werden:

$$\cos(x+\alpha) + i\sin(x+\alpha) = e^{i(x+\alpha)} = e^{ix}e^{i\alpha}$$

1D-Basisfunktionen

Bildfunktion: $f(n)$, n=0,N-1,

1	0	1	0

also: N Basisfunktionen

$b_u(n) = \exp(i \cdot 2\pi/N \cdot n \cdot u)$, mit Frequenzen u=0,N-1

z.B. $b_0(n) = [\ (1,1), (1,1), \ldots, (1,1)\ ]$

Transformation **FT** : $\mathbf{FT(f) = F = f \cdot B}$ (Vektor-Matrix-Schreibweise)

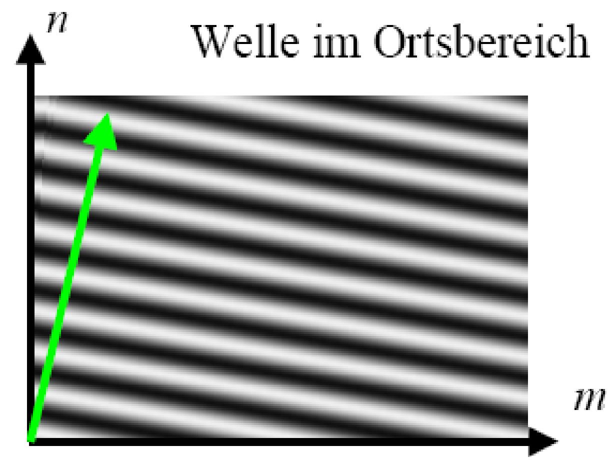
$F(u) = \sum_m f(n) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi/N \cdot n \cdot u)$, für alle u=0,N-1

Rücktransformation $\mathbf{FT^{-1}}$: $\mathbf{FT^{-1}(F) = F \cdot B^T}$ (Vektor-Matrix-Schreibweise)

$f(n) = 1/N \cdot \sum_u F(u) \cdot \exp(i \cdot 2\pi/N \cdot n \cdot u)$, für alle n=0,N-1

Skalierungsfaktor, weil die Basisfunktionen nicht normiert sind.

2D-Basisfunktionen



Basisfunktionen sind Wellen (Frequenz, Richtung, Amplitude, Phase):

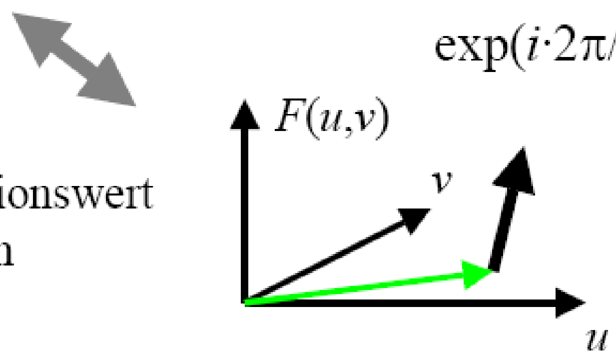
$$\exp(i \cdot 2\pi / N \cdot (mu + nv))$$

Richtung ist durch Vektor $(u\ v)$ gegeben.

Die Basisfunktionen der 2-D Fouriertransformation sind zerlegbar:

$$\exp(i \cdot 2\pi / N \cdot (mu + nv)) = \exp(i \cdot 2\pi / N \cdot m \cdot u) \cdot \exp(i \cdot 2\pi / N \cdot n \cdot v)$$

(komplexer) Funktionswert im Frequenzbereich



2D-Fouriertransformationspaar

$$F(u,v)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\cdot e^{-i\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{um}{M}+\frac{vn}{N}\right)}$$

$$f(m,n)=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} F(u,v)\cdot e^{i\cdot 2\pi\cdot\left(\frac{um}{M}+\frac{vn}{N}\right)}$$

Transformationspaar für Bilder der Größe *M*x*N*

Transformationspaar für quadratische Bilder der Größe *N*x*N*

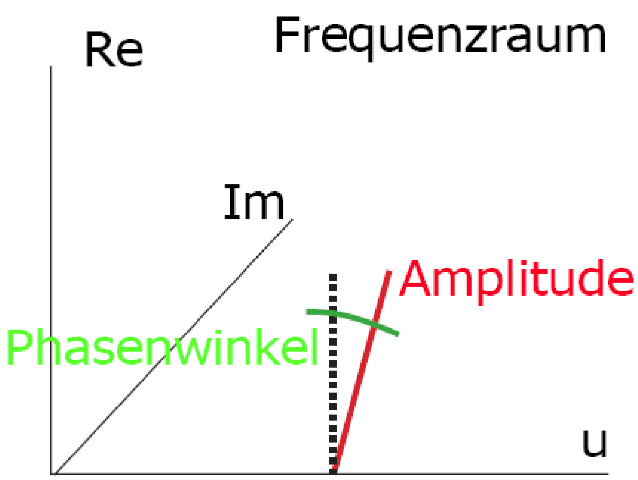
$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\cdot e^{-i\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot(um+vn)}$$

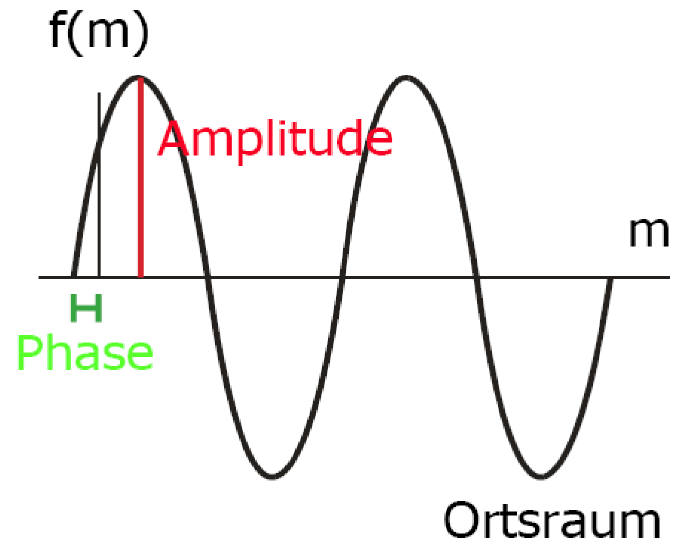
$$f(m,n)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} F(u,v)\cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{N}\cdot(um+vn)}$$

Phase und Amplitude

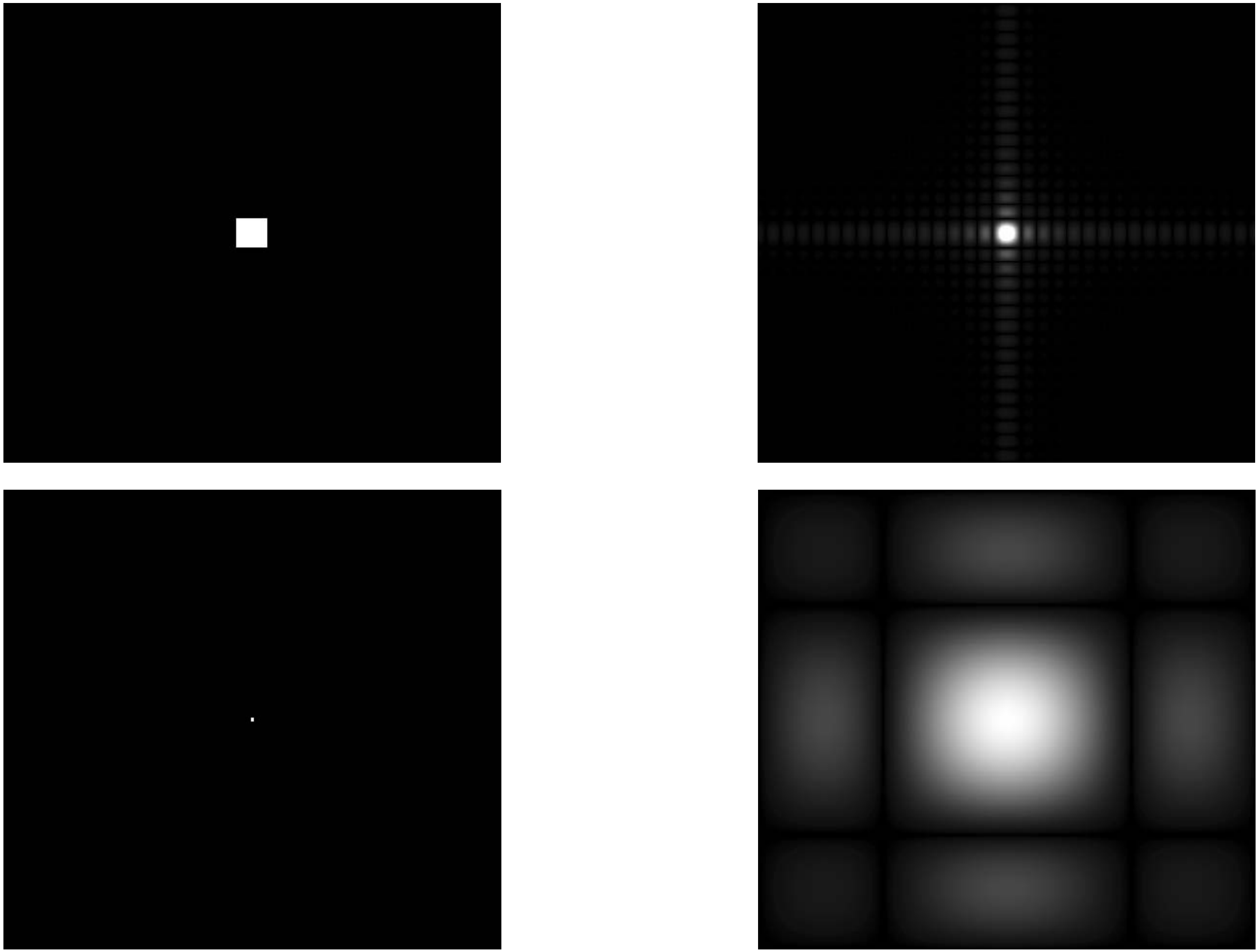
Das Resultat der Fouriertransformation ist eine komplexe Funktion $F(u)$.

Der Betrag eines Funktionswerts ist die Amplitude und der Winkel zur reellen Achse ist die Phase zur Gewichtung der betreffenden Basisfunktion





Beispiele f. Amplitude



Darstellungsweise

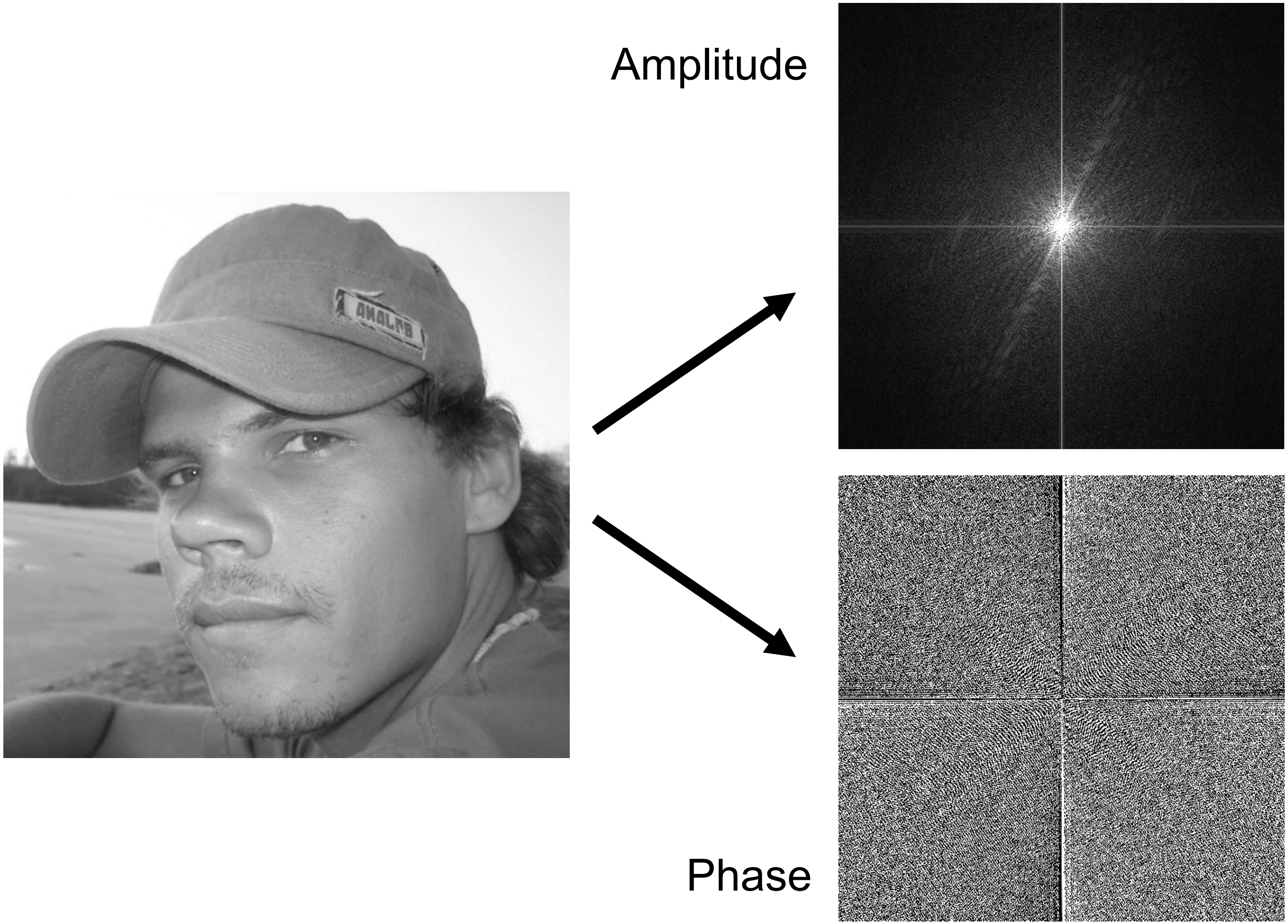
Original

Amplitude (zentriert, d.h. von –N/2 bis N/2)

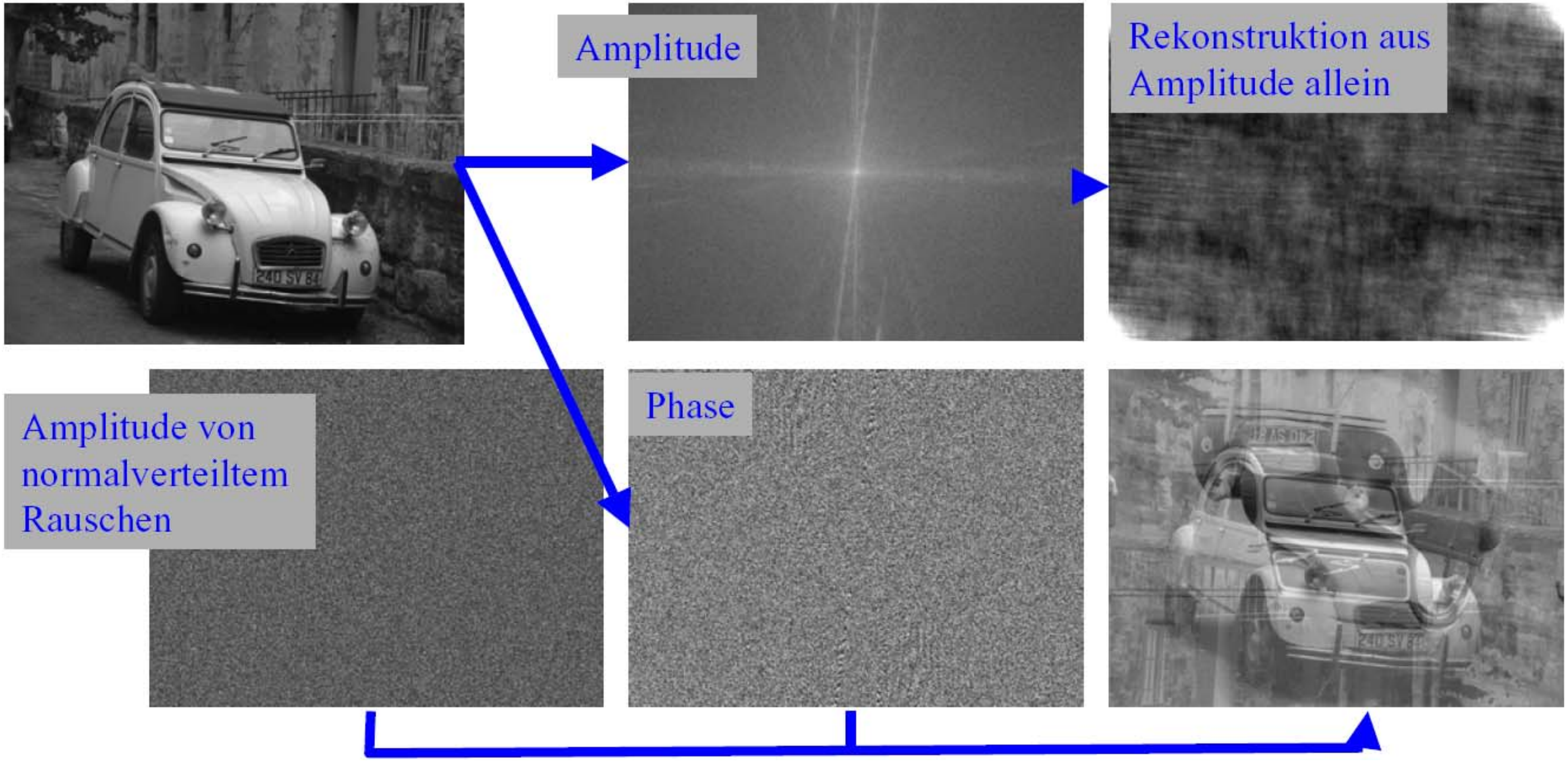
Amplitude (log. Skala)

Amplitude (zentriert, log. Skala)

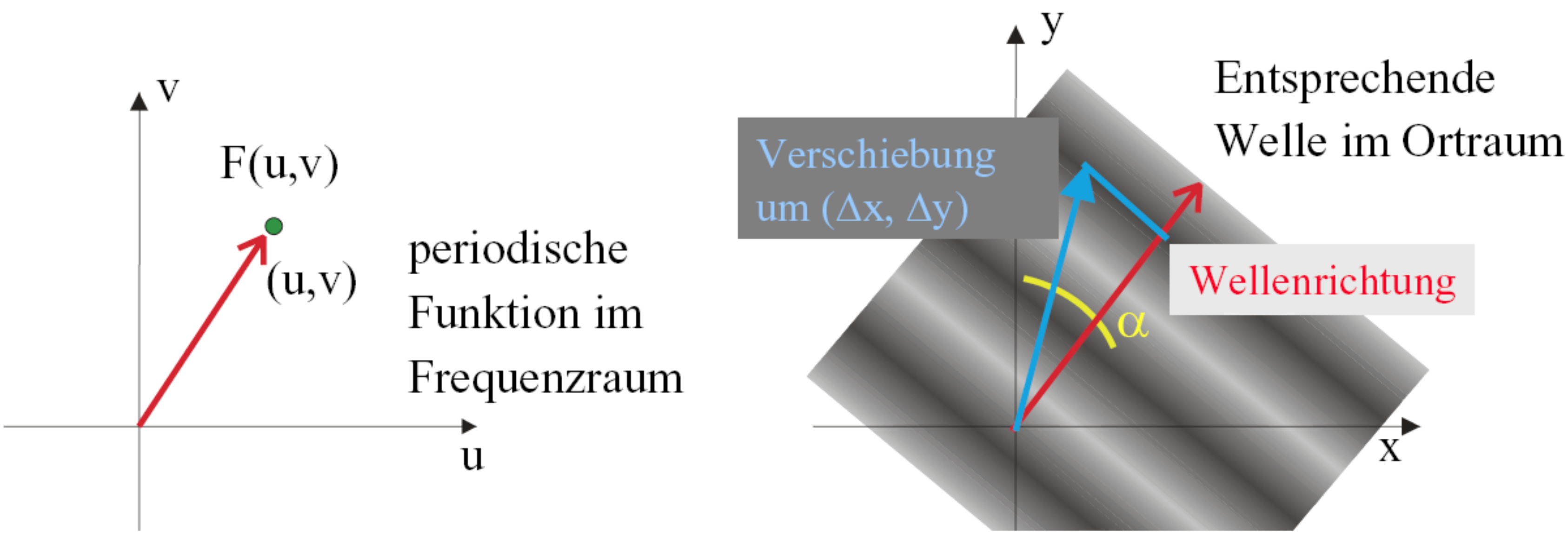
Beispiele



Einfluss von Amplitude und Phase

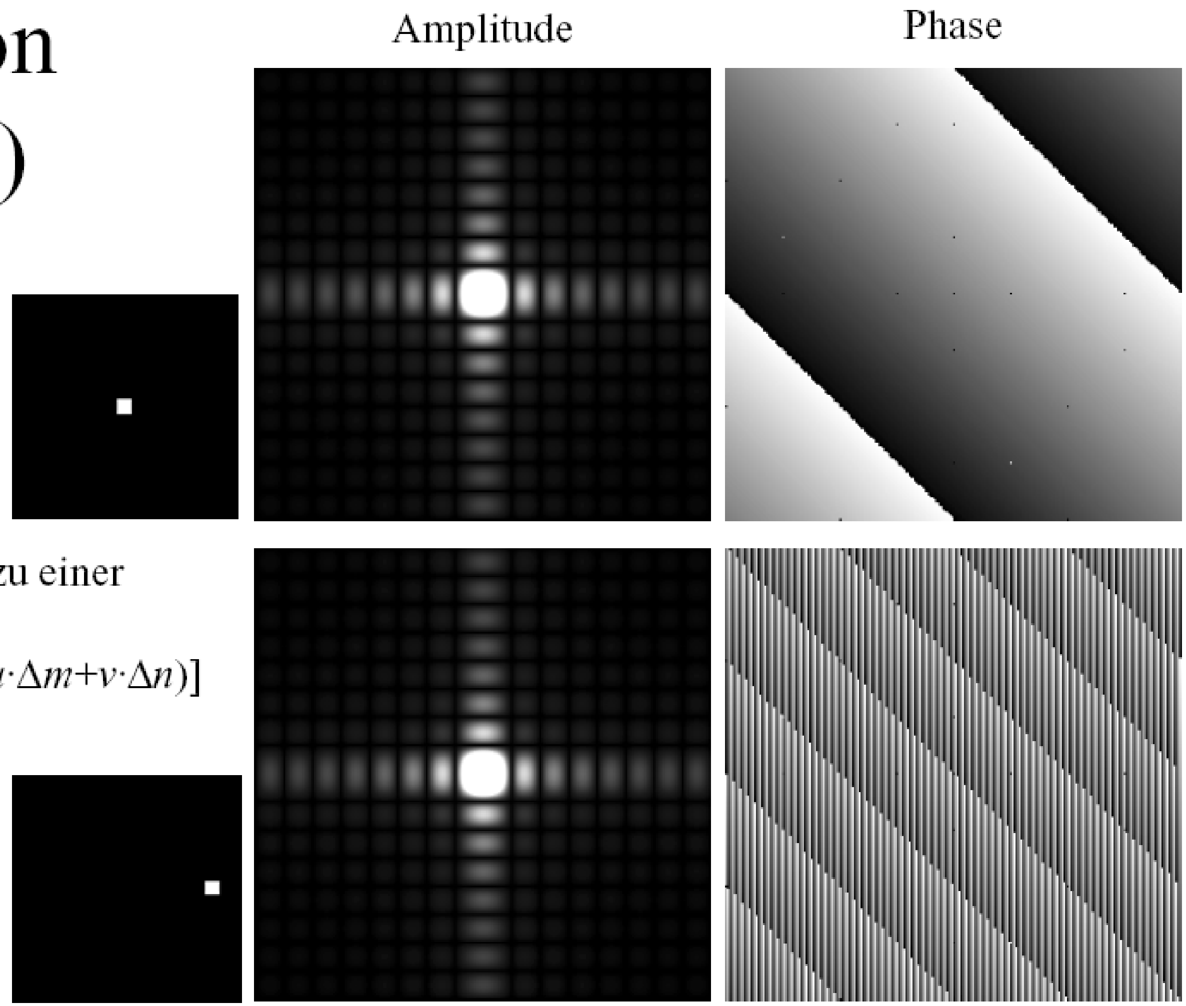


Translation



- Translation im Ortsbereich führt zu einer Translation der zusammensetzenden Wellen.
- Umfang der Translation hängt vom Unterschied zwischen Wellenrichtung $(u\ v)$ und Translationsrichtung $(\Delta x\ \Delta y)$ ab.
- Im Frequenzbereich bedeutet die Translation eine Phasenverschiebung.

Translation (Beispiel)



Translation um (Δm, Δn) führt zu einer Phasenverschiebung
$F'(u,v) = F(u,v) \cdot \exp[-i \cdot 2\pi/N \cdot (u \cdot \Delta m + v \cdot \Delta n)]$

Phasenverschiebung

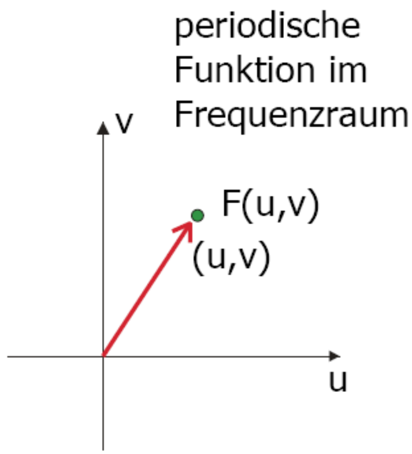
$p_{u,v} = |(\Delta x, \Delta y)| \cdot \cos(\alpha) \,/\, T_{u,v}$ mit

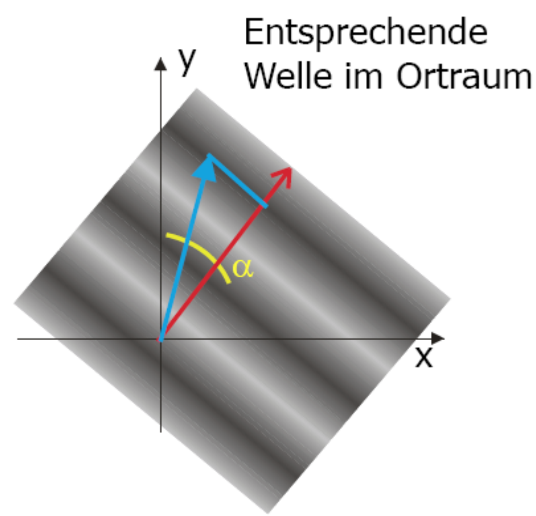
- $\cos(\alpha)$ - Winkel zwischen Wellenrichtung und Richtung von $(\Delta x, \Delta y)$
- $T_{u,v}$ - Wellelänge = 1/Frequenz

$$\cos(\alpha) = \frac{<(\Delta x, \Delta y),(u,v)>}{|(\Delta x, \Delta y)| \cdot |(u,v)|}$$

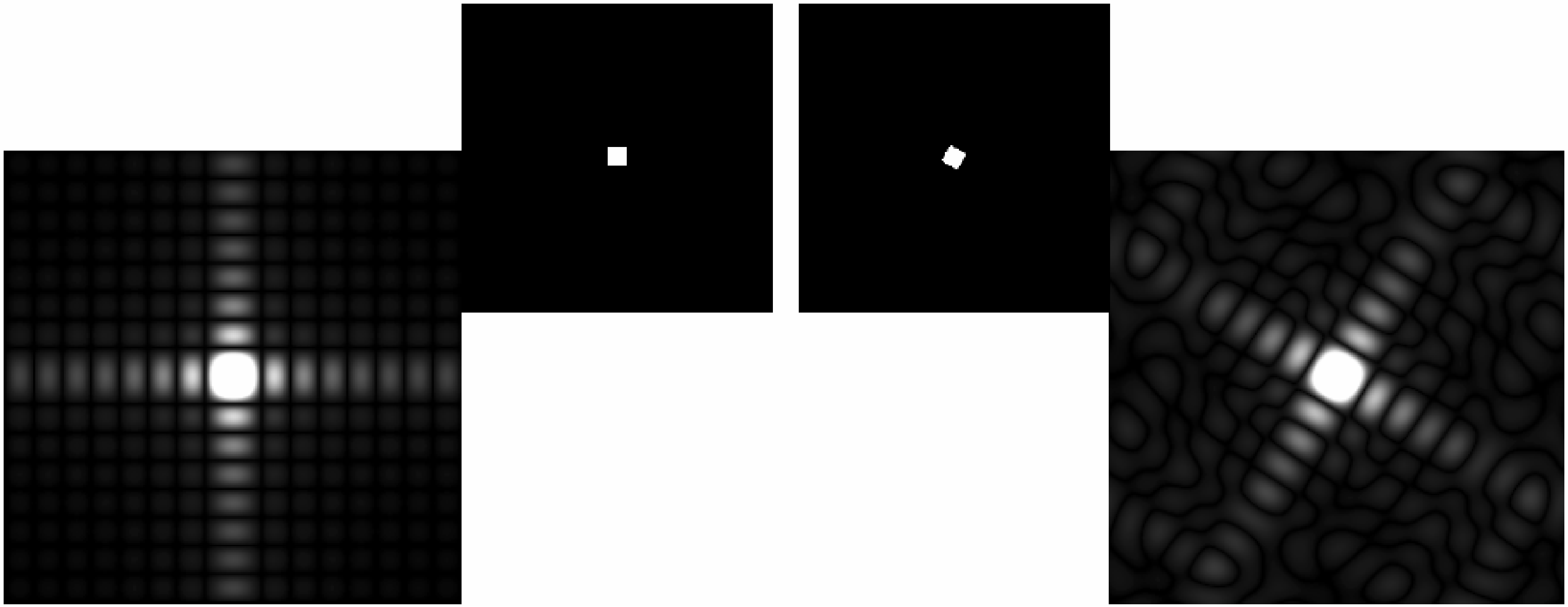
$$T_{u,v} = N/2\pi \cdot |(u,v)|$$

$$\Rightarrow p_{u,v} = \exp(i \cdot 2\pi/\mathrm{N} \cdot (u\Delta x + v\Delta y)$$





Rotation: $F(u,v)$ wird in gleicher Weise rotiert wie $f(m,n)$.



Periodizität und Symmetrie

- Für ein- und zweidimensionale Funktionen mit M bzw. M und N Werten gilt:
  - $F(u) = F(u+M), f(m)=f(m+M)$
  - $F(u,v) = F(u+M,v) = F(u,v+N) = F(u+M,v+N)$
  - $f(m,n) = f(m+M,n) = f(m,n+N) = f(m+M,n+N)$
- Für reellwertige Funktionen f gilt für die Fouriertransformierte:
  - $F(u) = {}^*F(-u)$
  - $F(u,v) = {}^*F(-u,-v)$

  (reduziert die zu berechnenden Werte um die Hälfte)

  *x=a-ib ist die komplex-konjugierte der komplexen Zahl a=a+ib.

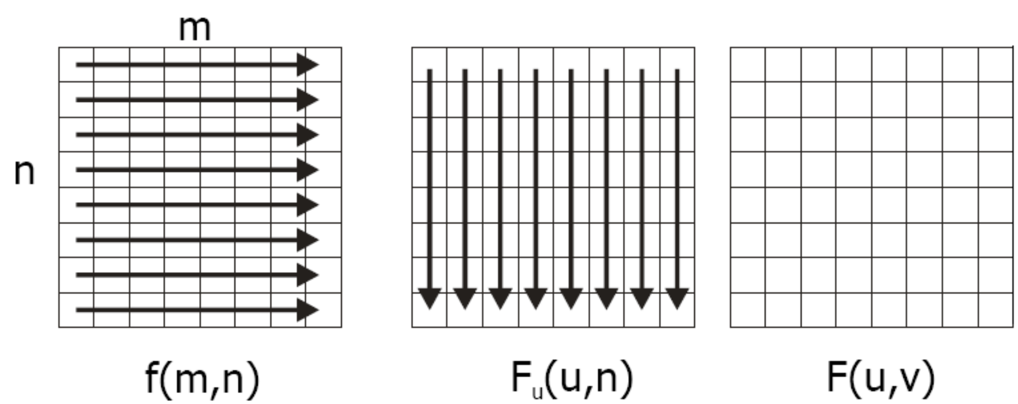
Separabilität

Die Fouriertransformation ist separabel, d.h., sie kann zunächst in M-Richtung und anschließend auf diesen Zwischenergebnissen in N-Richtung ausgeführt werden.

$$
\begin{aligned}
F(u,v) \quad &= 1/N^2 \cdot \Sigma_\nu \, \Sigma_\mu \, f(m,n) \cdot \exp(-\, i \cdot 2\pi \cdot (um+vn)/\mathrm{N}) \\
&= 1/N^2 \cdot \Sigma_\nu \, \Sigma_\mu \, f(m,n) \cdot \exp(-\, i \cdot 2\pi \cdot um/N) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot vn/N) \\
&= 1/N^2 \cdot \Sigma_\nu \left[\Sigma_\mu \, f(m,n) \cdot \exp(-\, i \cdot 2\pi \cdot um/N) \right] \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot vn/N) \\
&= 1/N^2 \cdot \Sigma_\nu \, F_u(m,n) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot vn/N)
\end{aligned}
$$

kann aus der inneren Summe ausgeklammert werden.

Reduziert den Berechnungsaufwand von $O(N^4)$ auf $O(N^3)$.



Konvolution und Korrelation

1	0	-1	0	0	0	0
1	0	-1	1	0	0	0
1	0	-1	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0

	1	2	0	-2	-1	
	2	2	0	-2	-2	
	3	2	0	-2	-3	
	3	2	0	-2	-3	
	2	2	0	-2	-2	

Worst case Aufwand im Ortsraum: N^4 für Kantenlänge N des Bildes

Konvolution und Korrelation

- Konvolution und Korrelation sind zwei eng verwandte Filter-Operationen.
- Beide können im Ortsraum und im Frequenzraum ausgeführt werden.
- Die Operation im Frequenzraum ist eine einfache Multiplikation (Aufwand N^2).

Konvolution im Frequenzraum

$$\boxed{F(u)\cdot H(u)} \quad = \Sigma_k f(k)\cdot\exp(-i2\pi uk/N)\cdot\Sigma_m h(m)\cdot\exp(-i2\pi um/N)$$

$$= \Sigma_m \Sigma_k \left[f(k)\cdot\exp(-i2\pi uk/N)\cdot \mathrm{h}(m)\cdot\exp(-i2\pi um/N)\right]$$

$$= \Sigma_m \Sigma_k \left[f(k)\cdot h(m)\cdot\exp(-i2\pi uk/N)\cdot\exp(-i2\pi um/N)\right]$$

$$\left(\text{Verschiebeeigenschaft } h(m)\cdot\exp(-i2\pi uk/N) = \mathrm{h}(m-k)\right)$$

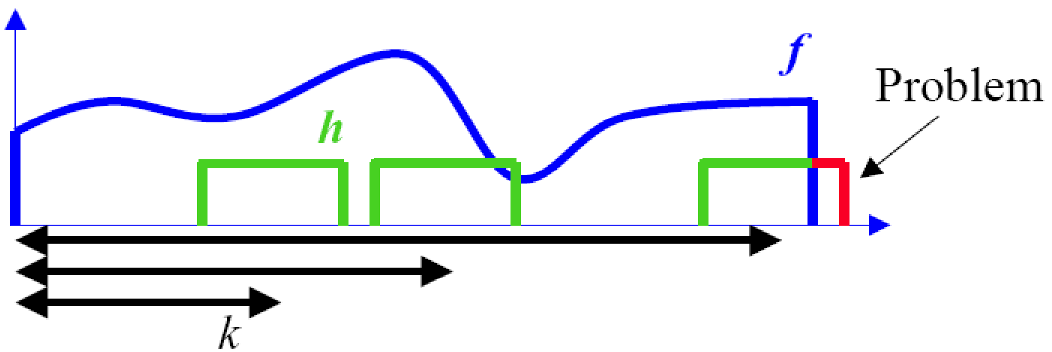
$$= \Sigma_m \Sigma_k f(k)\cdot h(m-k)\cdot\exp(-i2\pi um/N)$$

$$= \Sigma_m \left[\Sigma_k f(k)\cdot h(m-k)\right]\cdot\exp(-\mathrm{i}2\pi um/N)$$

$$= \mathbf{FT}\left[\Sigma_k f(k)\cdot h(m-k)\right] = \boxed{\mathbf{FT}\left[[f*h](m)\right]}$$

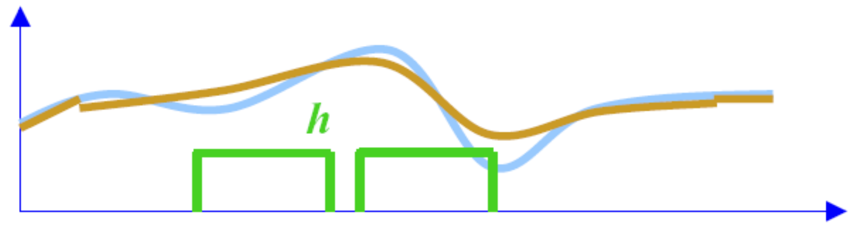
Konvolutionskern

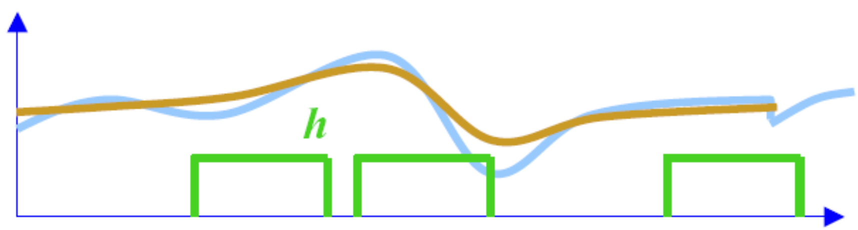
- Konvolution (1D): $[f*h](m)=\Sigma_{k=-\infty,\infty} f(k)\cdot h(m-k)$
- Die meisten Konvolutionsfunktionen h sind nur in einem kleinen Intervall von Null verschieden (Konvolutionskern).
- Mit $h(n)\neq 0$ für $-K\leq n\leq K$ ist: $[f*h](m)=\Sigma_{k=-K,K} f(k)\cdot h(m-k)$.
- Problem: **Rand** von f.

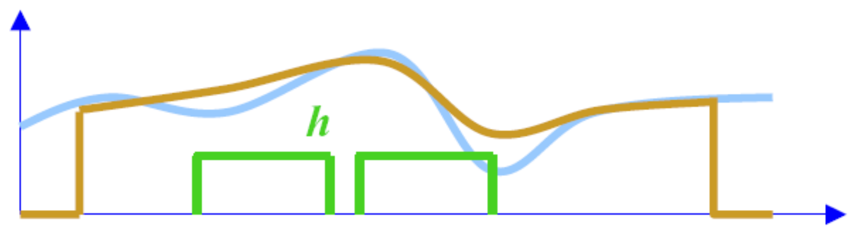


Konvolution am Bildrand

- Lösung 1: periodische Fortsetzung des Bildes
  (diese Lösung wird automatisch gewählt, wenn im Frequenzraum multipliziert wird)
- Lösung 2: Rand ist undefiniert
  - Beibehaltung des ursprünglichen Resultats
  - Löschen der Randwerte







Konvolution am Bildrand

Diskrete Kosinustransformation (DCT)

- Zerlegung in Wellen unterschiedlicher Frequenz.
- Sehr ähnlich zur Fouriertransformation.
- Basisfunktionen sind reell.
- Wird vor allem bei Kompressionsverfahren verwendet(JPEG).
- ***Wie lassen sich genügend reellwertige Basisfunktionen finden?***

Basisfunktionen der DCT

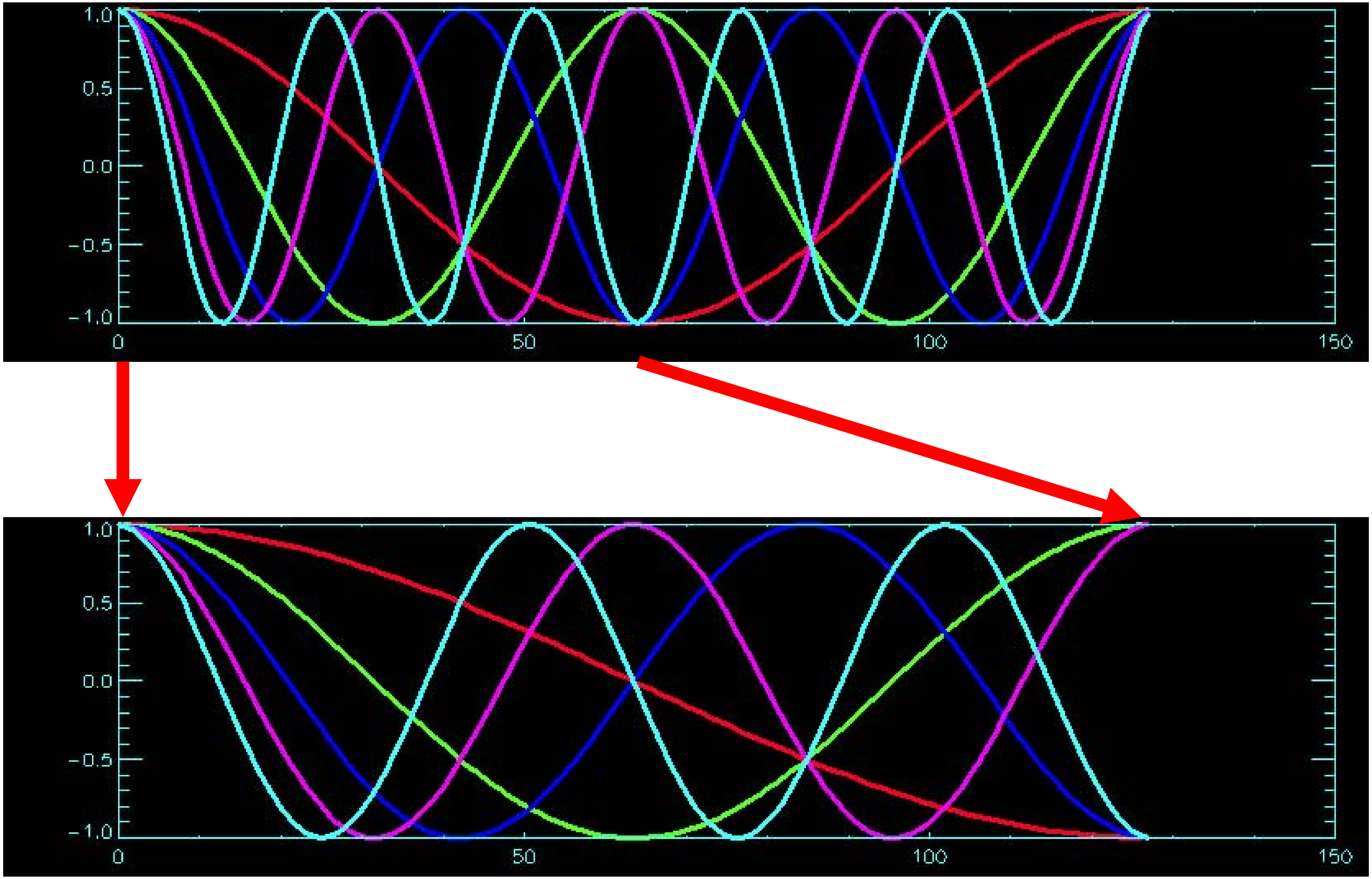
$$C(u,v) = \alpha(u)\alpha(v)\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\cos\left(\frac{(2m+1)u\pi}{2M}\right)\cos\left(\frac{(2n+1)v\pi}{2N}\right)$$

$$f(m,n) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} \alpha(u)\alpha(v)C(u,v)\cos\left(\frac{(2u+1)m\pi}{2M}\right)\cos\left(\frac{(2v+1)n\pi}{2N}\right).$$

$$\alpha(u) = \begin{cases} \sqrt{1/M} & \text{, für } u = 0 \\ \sqrt{2/M} & \text{, für } u \neq 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \alpha(v) = \begin{cases} \sqrt{1/N} & \text{, für } v = 0 \\ \sqrt{2/N} & \text{, für } v \neq 0 \end{cases}$$

- Basisfunktionen sind Wellen, deren Wert für jede zweite Frequenz *u* am Anfang und am Ende des Intervalls unterschiedliches Vorzeichen haben.

Basisfunktionen der DCT



Literatur

- Klaus D. Tönnies: "Grundlagen der Bildverarbeitung", ISBN 3-8273-7155-4
- (daraus auch viele Abbildungen der heutigen Vorlesung)

Projekt- oder Diplomarbeit in Fluidum

- Interaktive Schreibtischlampe