

2D Graphik: FFT und Anwendungen der Fouriertransformation

Vorlesung „2D Graphik“

Andreas Butz, Otmar Hilliges

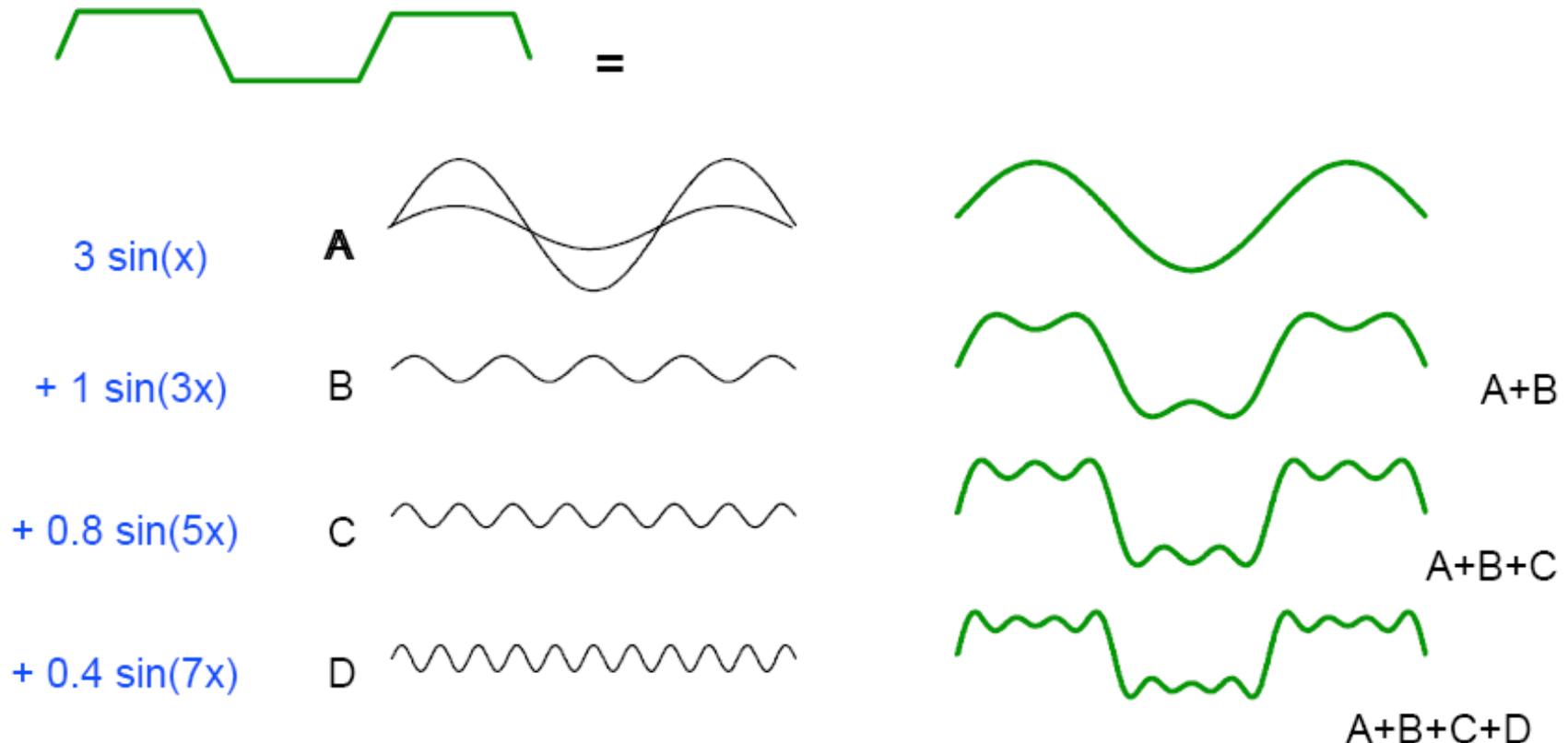
Freitag, 25. November 2005

Themen heute

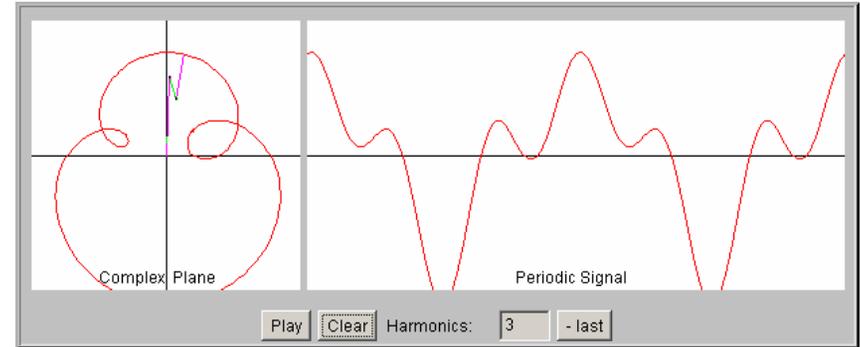
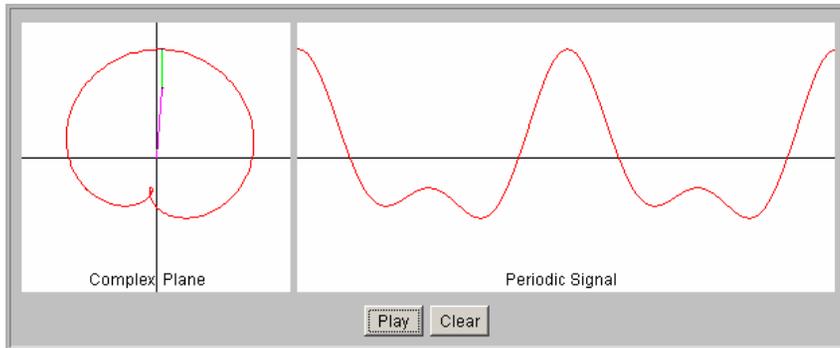
- Fouriertransformation nochmal anschaulich
- Berechnung der FFT
- Restauration linearer Bildstörungen durch inverse Filterung
- Transformation und Interpolation in Bildern

Fouriertransformation: Grundidee

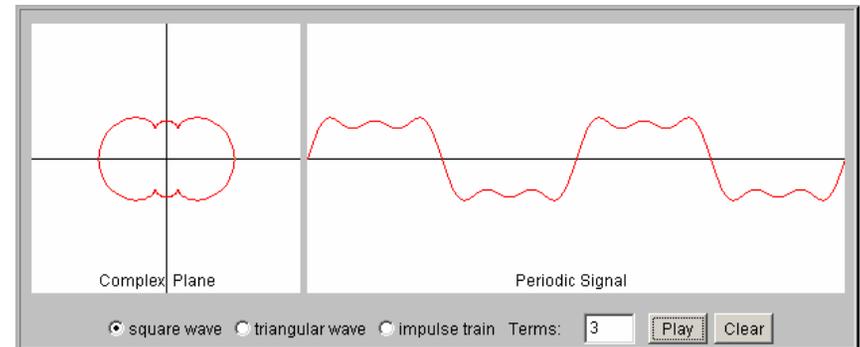
- Beschreibe beliebige Funktion als gewichtete Summe periodischer Grundfunktionen (Basisfunktionen) mit untersch. Frequenz



Überlagerung von Schwingungen: anschaulich

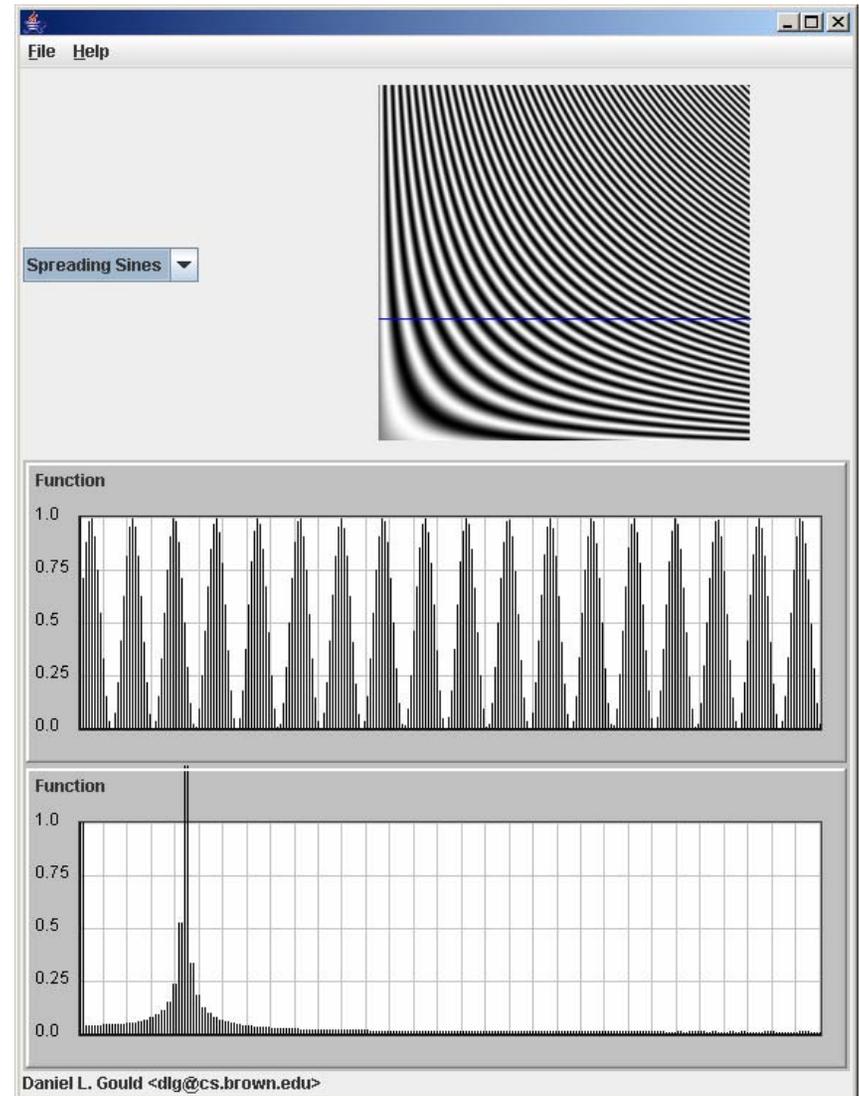


<http://www.jhu.edu/~signals/index.html>



Fourier Transformation zum Anschauen

- <http://www.cs.brown.edu/exploratories/>



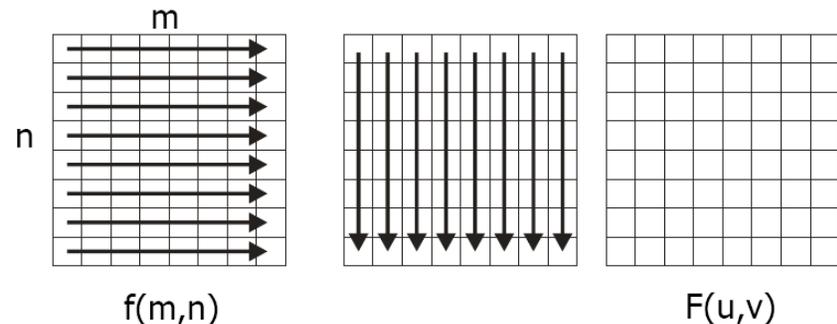
Fast Fourier Transformation

Vorgehensweise generell

- Vereinfachende Annahme: $N=2^k$, $k>1$
- Nutze Separabilität, um 2D-FT auf 1D zurückzuführen ($O(n^4) \rightarrow O(n^3)$)
- Teile Summe in zwei Teilsummen auf
- Finde Gemeinsamkeiten in den Teilsummen und berechne beide Teilsummen miteinander
- Betrachte die Teilsumme und unterteile rekursiv bis $N=1$ ($O(n^3) \rightarrow O(n^2 \log n)$)

Separabilität

$$\begin{aligned}
 F(u, v) &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} (um + vn)\right] = \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} um\right] \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} vn\right] = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} vn\right] \right) \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} um\right] = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} um\right] \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} vn\right] \right) = \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \exp\left[-i \frac{2\pi}{N} um\right] F_u(m)
 \end{aligned}$$



- Vorgehensweise: $F_u(m)$ für alle Spalten m berechnen und dann bei den Zeilen verwenden.

Divide Schritt

- Teile Summe in zwei Teilsummen auf

$$N = 2K, W_N = \exp\left(-i \frac{2\pi}{N}\right)$$

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n)(W_N)^{un} = \frac{1}{2K} \sum_{n=0}^{2K-1} f(n)(W_{2K})^{un} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n)(W_{2K})^{2nu} + \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n+1)(W_{2K})^{(2n+1)u} \right) \end{aligned}$$

- Finde Gemeinsamkeiten in den Teilsummen

$$F_{\text{even}}(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n)(W_{2K})^{2nu}, F_{\text{odd}}(u) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} f(2n+1)(W_{2K})^{2nu}$$

$$F(u) = \frac{1}{2} \left(F_{\text{even}}(u) + F_{\text{odd}}(u)(W_{2K})^u \right)$$

Ausnutzen der Periodizität

$$(W_K)^{u+N} = (W_K)^u, (W_{2K})^{u+N} = -(W_{2K})^u$$

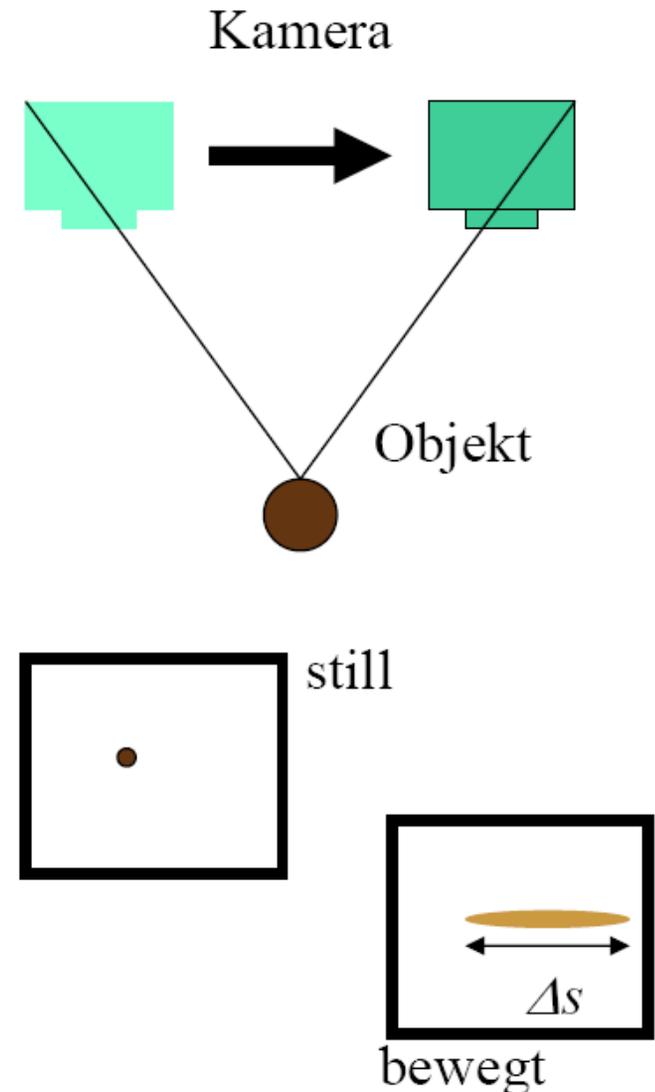
$$\begin{aligned} F(u+K) &= \frac{1}{2} \left(F_{\text{even}}(u+K) + F_{\text{odd}}(u+K)(W_{2K})^u \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(F_{\text{even}}(u) - F_{\text{odd}}(u)(W_{2K})^u \right) \end{aligned}$$

- Also kann man $F(u+K)$ mithilfe $F(u)$ berechnen (einmal $F_{\text{even}} + F_{\text{odd}}$, einmal $F_{\text{even}} - F_{\text{odd}}$)
- Betrachte die Teilsumme $[0 \dots K-1]$ und unterteile rekursiv bis $K=1$ ($O(n^3) \rightarrow O(n^2 \log n)$)

Restoration linearer Bildstörungen

Beispiel I: Bewegungsunschärfe

- Über einen Zeitraum Δt wird ein Objektpunkt p auf immer andere Punkte auf dem CCD-Chip abgebildet.
- Bei unbewegter Kamera sei die Bildhelligkeit des abgebildeten Punkts h .
- Dann ist sie bei bewegter Kamera $h/\Delta s$, wobei Δs die zurückgelegte Strecke ist.
- Wenn Δs für alle Punkte gleich ist, dann lässt sich die Veränderung durch eine Faltung beschreiben.



Bewegungsunschärfe

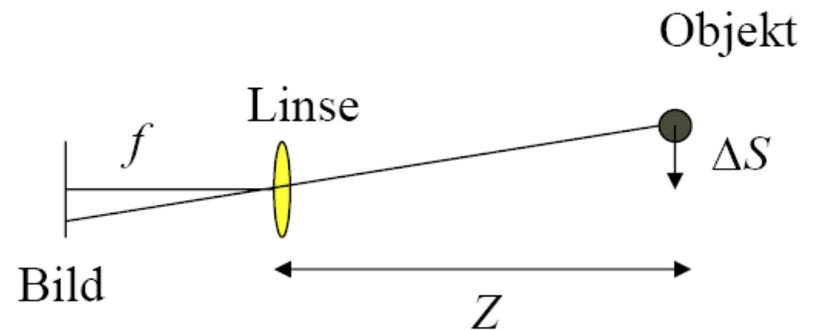
- Faltungskern ist eine Funktion w mit

$$w(t \cdot \cos \alpha, t \cdot \sin \alpha) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta s} & \left| \frac{t}{2} \right| < \Delta s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

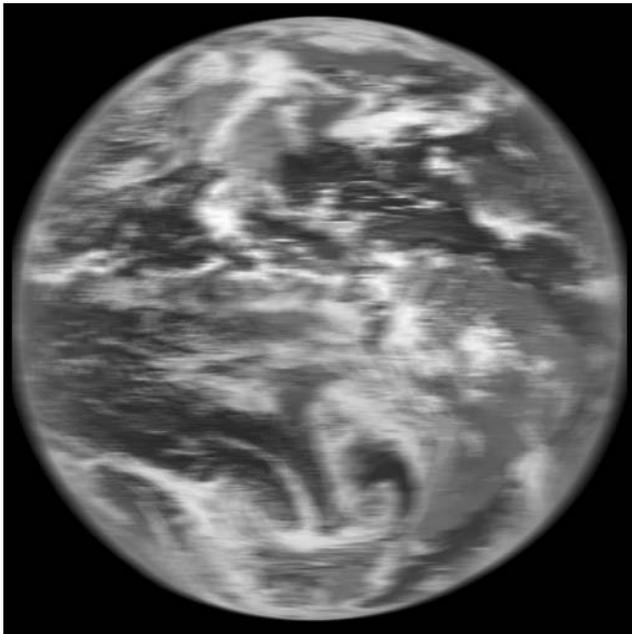
- Der Winkel α gibt die Bewegungsrichtung an.
- Die Strecke Δs gibt die Strecke an, um die sich der Punkt bewegt hat:

$$\Delta s = \frac{f}{Z} \cdot \frac{\Delta S}{p}$$

- f : Brennweite
- Z : Objektabstand
- ΔS : Bewegung in der X - Y -Ebene
- P : Pixelgröße

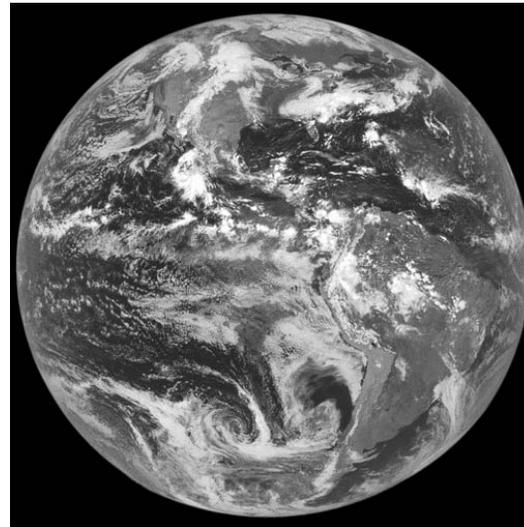


Bewegungsunschärfe



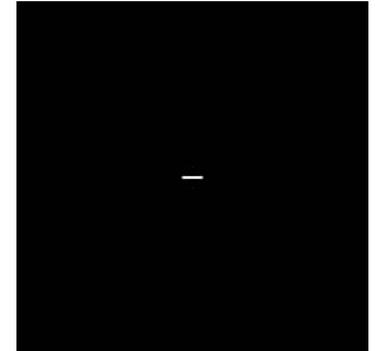
Gestörtes Bild

=



Original

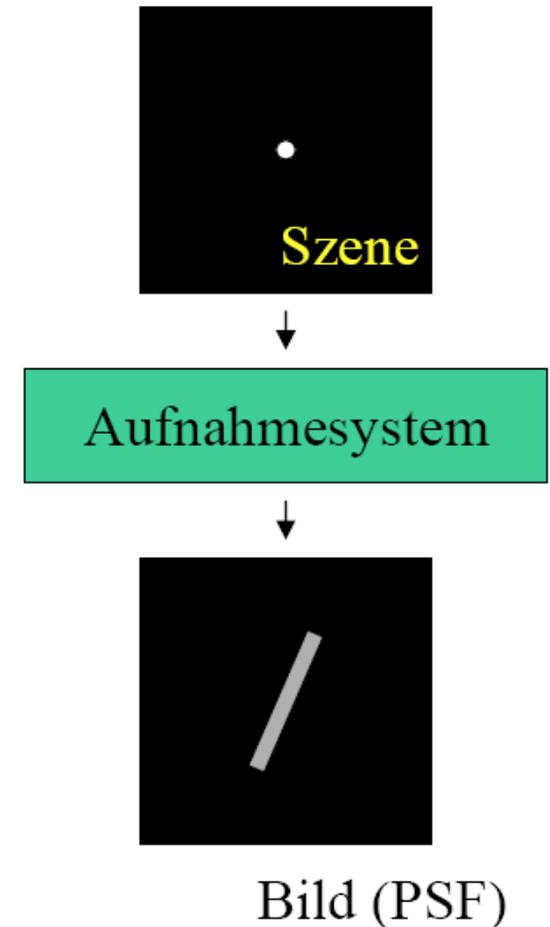
*



Faltungskern

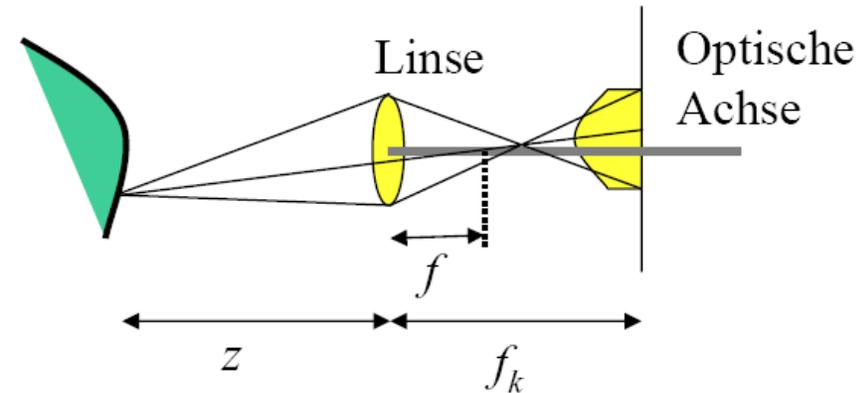
Repräsentation linearer Störungen

- Jede verschiebungsinvariante lineare Operation wird vollständig durch die Faltungsfunktion beschrieben.
- Die Faltungsfunktion beschreibt die Operation für beliebige Bilder
- Die Faltungsfunktion kann als Resultat der Veränderung eines Punkts erzeugt werden
- Punktantwort = Point Spread Function (PSF)



Beispiel II: Fokussierungsunschärfe

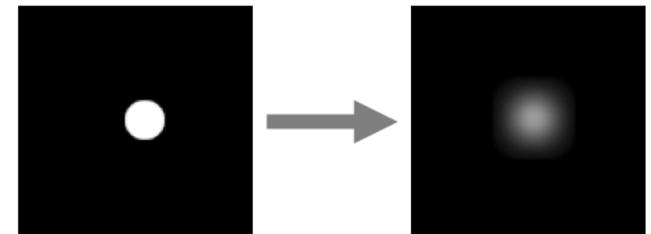
- Maß der Unschärfe hängt vom Punktabstand z , der Brennweite der Linse f und der Kammerkonstante f_k ab.



- Linsengesetz:
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f_k} \Leftrightarrow f_k = \frac{zf}{f - z}$$

- Größe des Unschärfekreises:
$$\frac{d}{f} = \frac{s}{f_k} \Leftrightarrow s = \frac{f_k d}{f} = \frac{zd}{f - z}$$

- Unschärfe kann durch Aufnahme eines punktförmigen Testobjekts angenähert werden.



Fokussierungsunschärfe

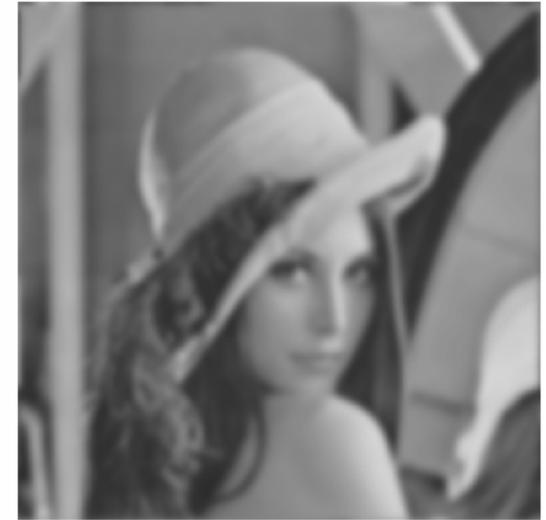


Wie kann die Störung rückgängig gemacht werden?

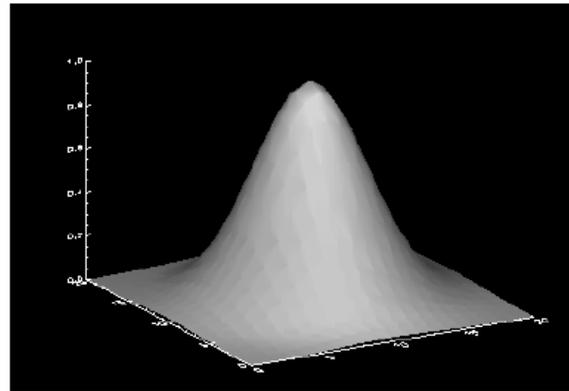
Bildrestauration

- Ziel: Korrektur des Bildsignals um bekannte und unbekannte Störungen
- Annahme: Störung kann durch einen verschiebungsinvarianten linearen Operator h beschrieben werden.
- $g(x,y) \rightarrow$ (Störung durch PSF h) $\rightarrow g'(x,y)$
- $g'(x,y) = [h^*g](x,y)$
- PSF beschreibt die Störung \rightarrow **Wie kann die PSF bestimmt werden?**

Gesucht: PSF

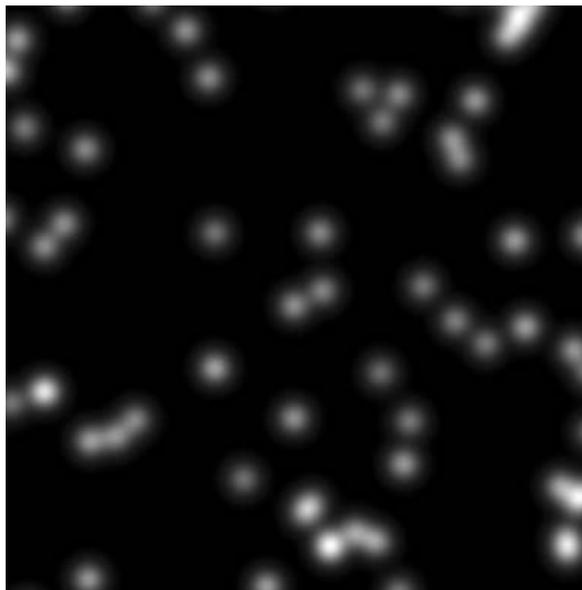


Gesucht:



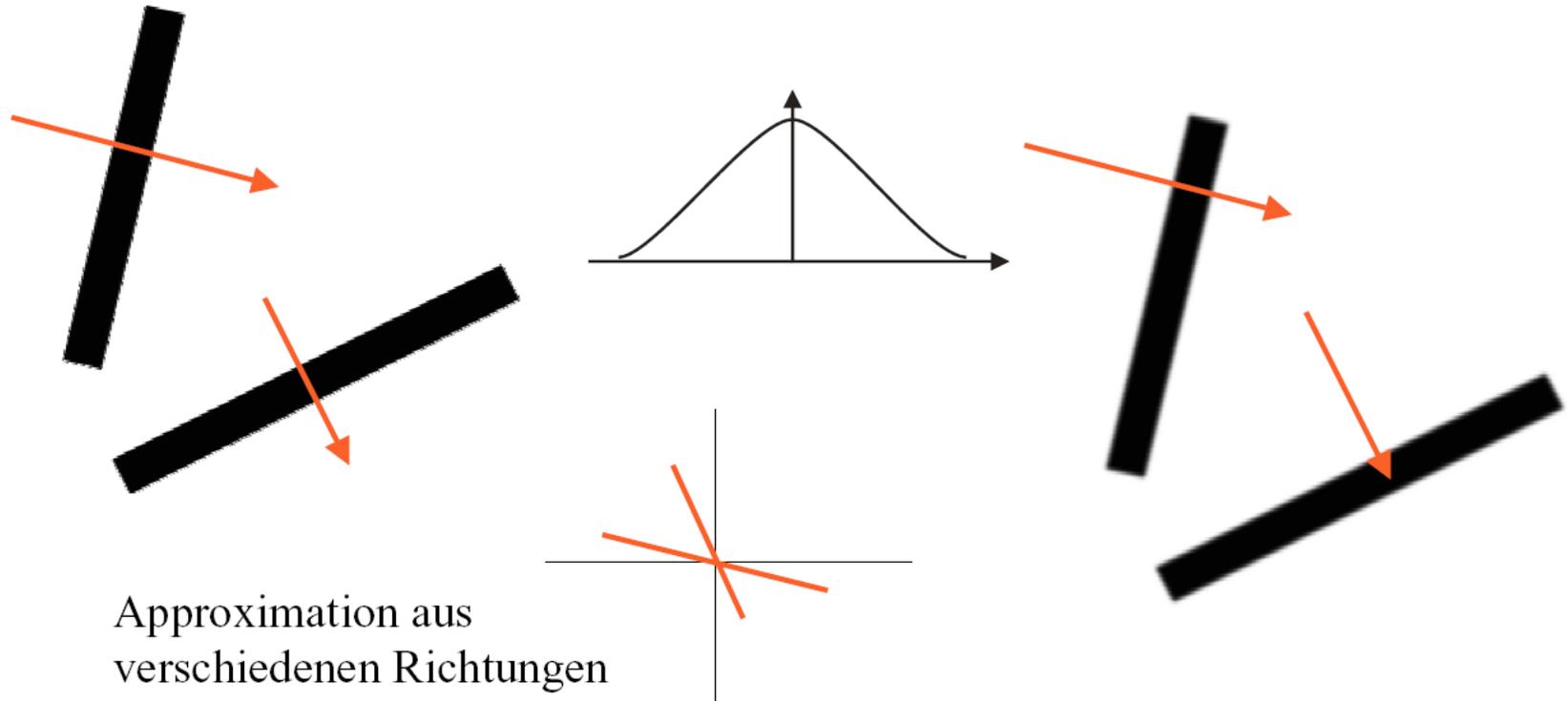
PSF

PSF von Testbildern



- Annahme: Störung ist unveränderlich und Testaufnahme ist möglich.
- Durch die Aufnahme eines punktförmigen Objekts kann ein δ -Impuls approximiert werden.
- Aufnahme ist eine Näherung für die PSF.

PSF aus dem aufgenommenen Bild



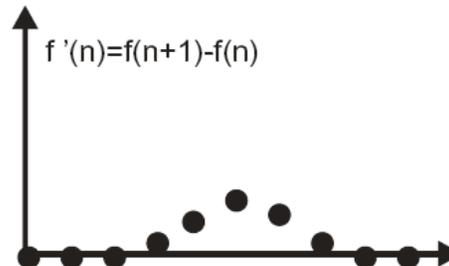
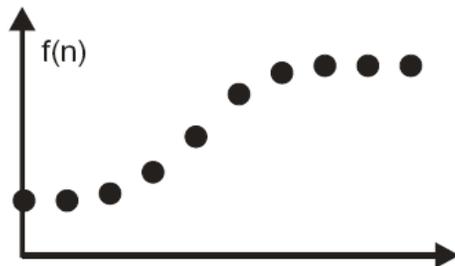
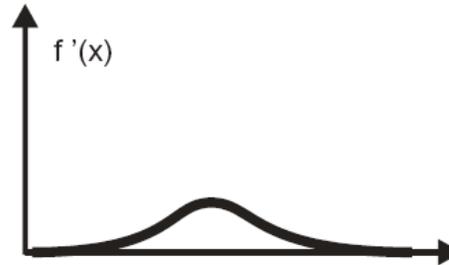
- Testaufnahme ist nicht möglich: Näherungsweise Bestimmung der PSF durch Betrachtung von Punkten oder Linien im gestörten Bild.

Kanten

- Die meisten Bilder weisen wenige Linien oder Punkte auf, aber Kanten können in fast jedem Bild gefunden werden.



1D-Kanten



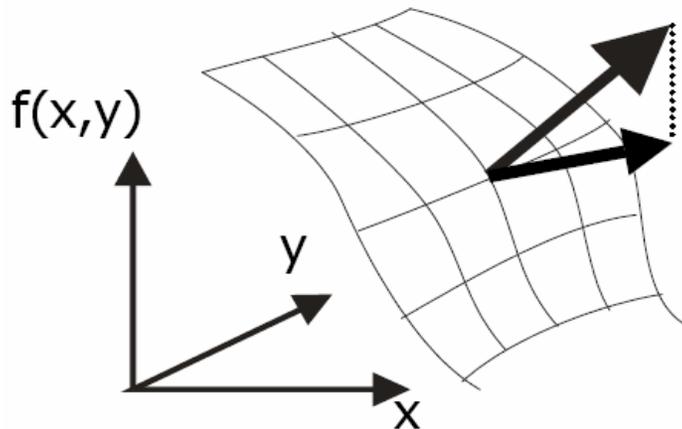
Die **Stärke einer Kante** hängt von der Steigung der Funktion ab:

Betrag der ersten Ableitung bestimmen.

Für **diskrete Funktionen**:

Ableitung wird durch Differenz angenähert

Kanten im 2D-Raum: Gradienten



Richtung: Richtung der größten Steigung.

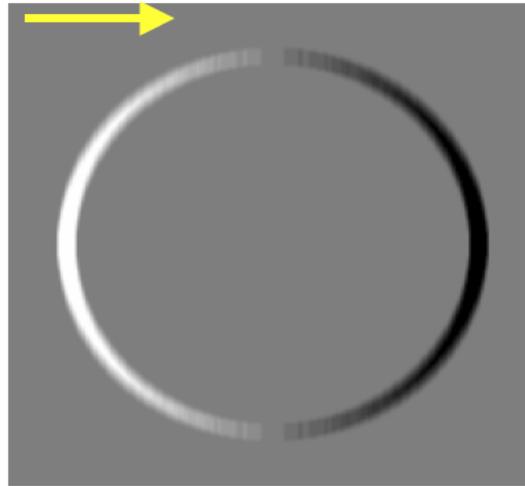
Länge: Stärke der stärksten Steigung.

- Gradient im kontinuierlichen Raum (x,y) : Vektor der partiellen Ableitungen der Bildfunktion in x- und y-Richtung: $(f(x,y)) = (\partial f/\partial x \ \partial f/\partial y)$
- Approximation des Gradienten: Differential wird durch Differenz approximiert:

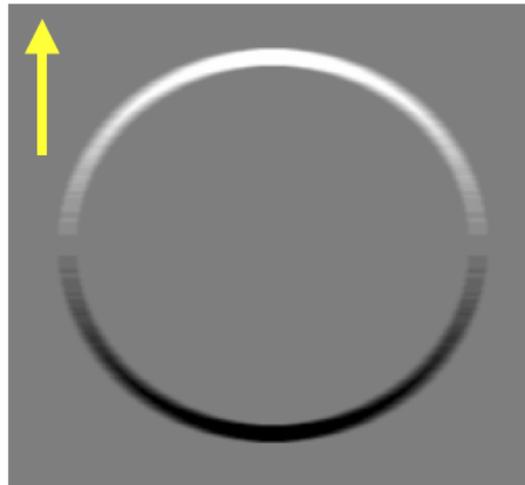
$$\vec{G}(f)(m,n) \approx [G_x(m,n) \ G_y(m,n)] = [f(m,n)-f(m-1,n) \ f(m,n)-f(m,n-1)]$$

- Die Länge des Gradienten ist sein Betrag $|G(f)|$ oder näherungsweise $|G_x|+|G_y|$.

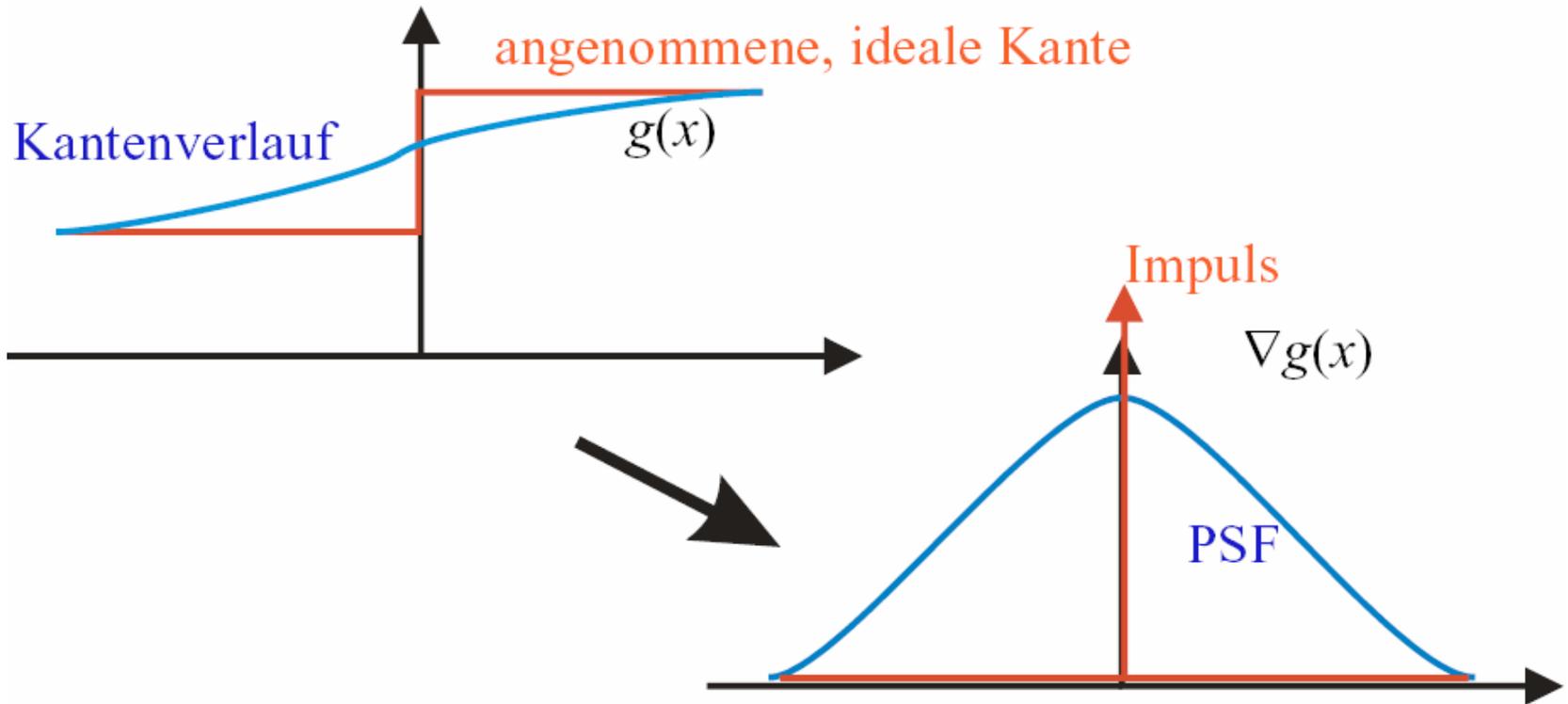
Elemente des Gradienten



Betrag : $\sqrt{G_x^2 + G_y^2}$
Richtung: $\tan^{-1}(G_y/G_x)$



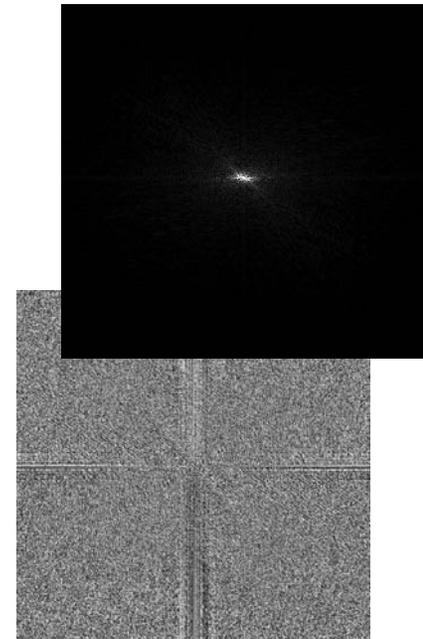
PSF aus Kanten



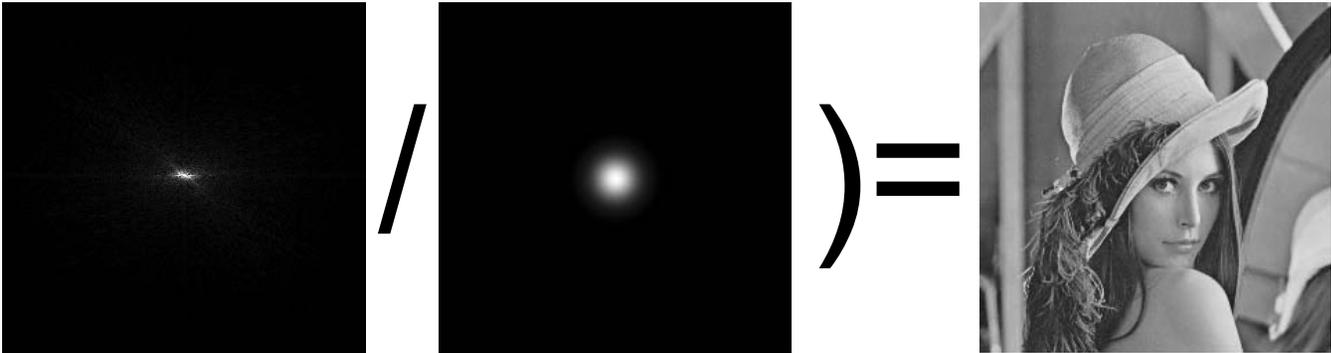
- PSF kann auch aus dem Verlauf einer als ideal angenommenen Kante approximiert werden.

Invertierung der Störung

- Überführung der Repräsentation in den Frequenzraum:
- $G'(u,v) = \mathbf{FT}[g'(m,n)] = \mathbf{FT}[[h^*g](m,n)] = H(u,v) \cdot G(u,v)$
- Invertierung:
- $g(m,n) = \mathbf{FT}^{-1}[G'(u,v)/H(u,v)]$ (**Inverse Filterung**)

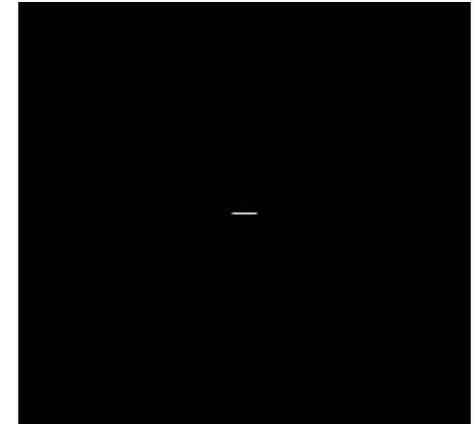


Inverse Filterung

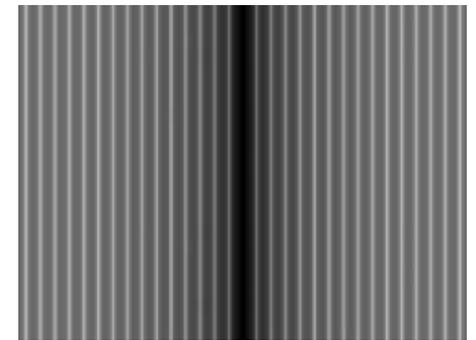
$$FT^{-1} \left(\frac{\text{[Distorted Image Spectrum]}}{\text{[Filter Spectrum]}} \right) = \text{[Original Image]}$$
The diagram illustrates the process of inverse filtering. It features the mathematical expression $FT^{-1} \left(\frac{\text{[Distorted Image Spectrum]}}{\text{[Filter Spectrum]}} \right) = \text{[Original Image]}$. The first square in the fraction represents the distorted image spectrum, showing a central peak with a surrounding halo. The second square represents the filter spectrum, which is a smooth, bell-shaped curve centered on the same point. The result of the division is the original image, a grayscale photograph of a woman wearing a hat.

- Vollständige Rückgewinnung der Information aus den gestörten Daten

Bewegungsunschärfe



PSF



FT(PSF)

Bewegungsunschärfe



Resultat der inversen Filterung $\mathbf{FT}^{-1} [\mathbf{FT} (g')(u,v)/\mathbf{FT}(PSF)(u,v)]$

Numerische Probleme bei der inversen Filterung

$$g = h * f \Rightarrow f(m, n) = FT^{-1} \left(\frac{G(u, v)}{H(u, v)} \right)$$

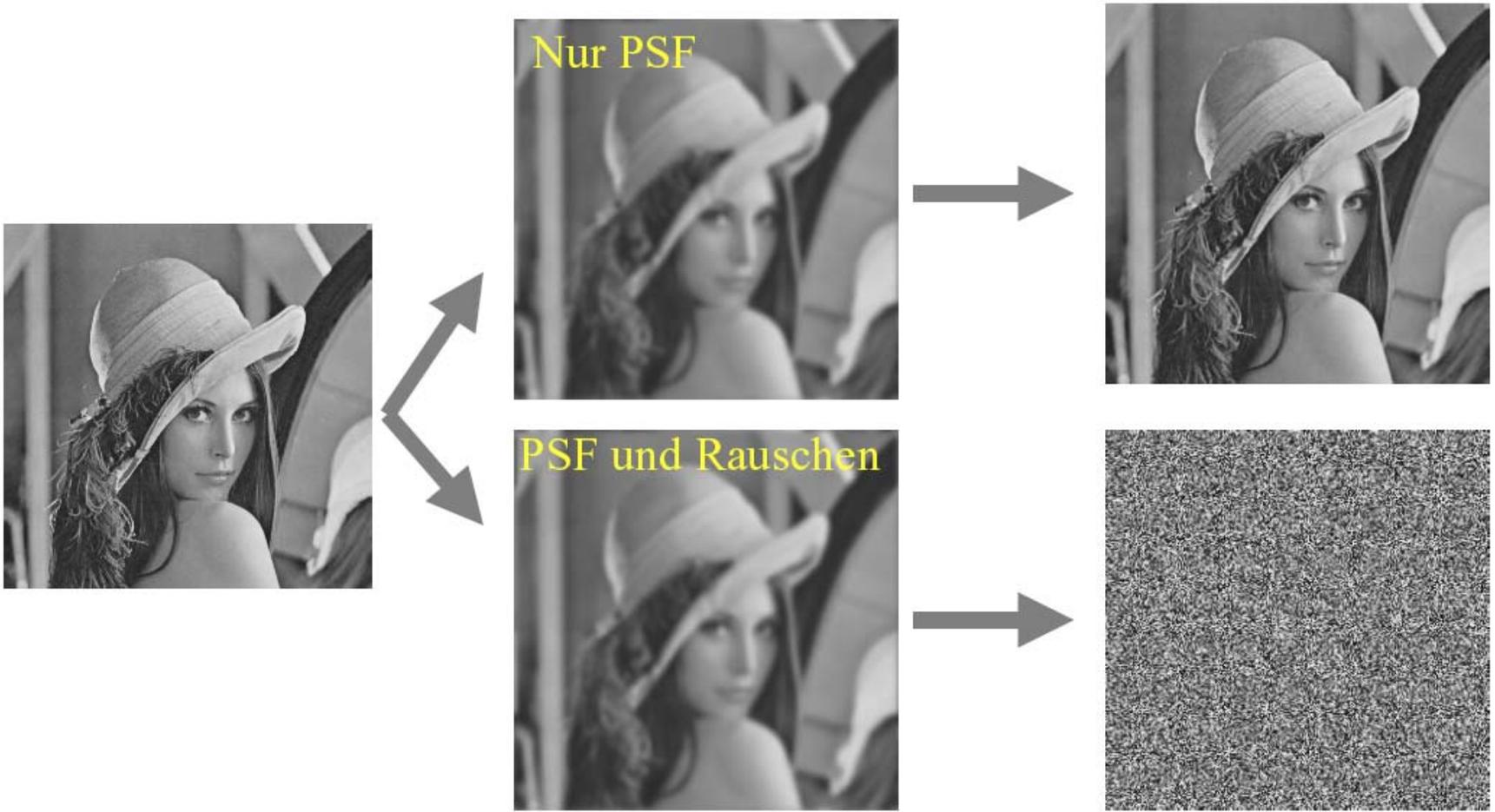
- Problem: Nullstellen von H
 - Treten auf, falls h als Matrix nicht den vollen Rang hat
 - Auch kleine Werte von H sind numerisch schon ein Problem
- Deswegen in der Praxis:

$$F(u, v) = \begin{cases} \frac{G(u, v)}{H(u, v)} & H(u, v) > H_{\min} \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Rauschen

- Problem: Inverse Filterung geht von idealen (ungestörten) Daten aus
- In Wirklichkeit enthalten Bilddaten Rauschen
- Dieses Rauschen wird bei der inversen Filterung extrem verstärkt
- Rauschen lässt sich nicht „herausrechnen“, da es nicht wiederholbar ist

Rauschen



Ad-hoc Lösung

- Gewichte die Wirkung der inversen Filterung mit der Amplitude der Störungsfunktion im Verhältnis zur mittleren Amplitude

$$\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|}{A_N}$$

- Problem: Gewichtung nimmt keine Rücksicht auf die Signalstärke von F

Wiener Filter

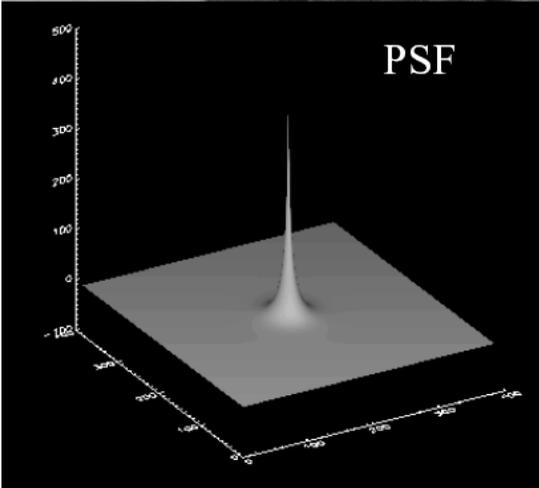
$$\frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + \left(\frac{S_\eta(u, v)}{S_f(u, v)} \right)} \text{ oder } \frac{1}{H(u, v)} \frac{|H(u, v)|^2}{|H(u, v)|^2 + k}$$

- Wobei S_η und S_f die Spektren des Rauschens bzw. der ungestörten Funktion sind
 - $S_\eta = 0$ (ungestört) \rightarrow perfekte inverse Filterung
- Leider ist S_η in der Praxis meist unbekannt
- Lösung: heuristisches Wiener Filter mit k

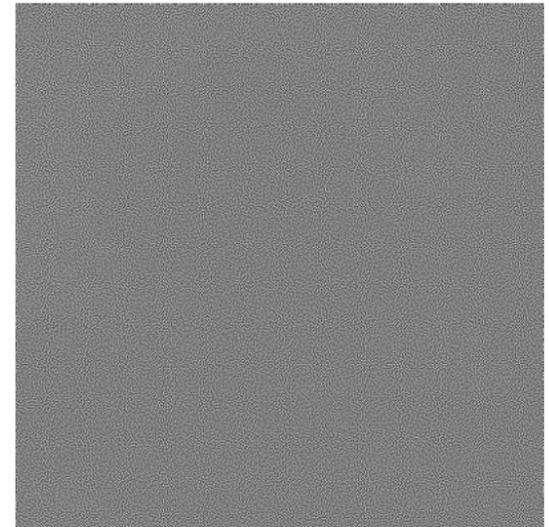
original



Beispiel



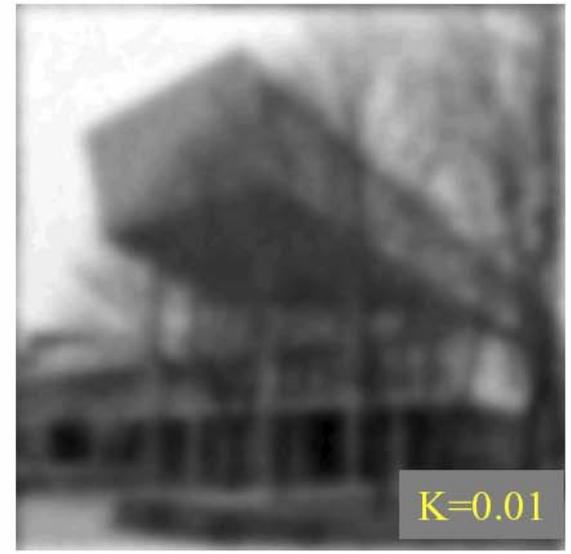
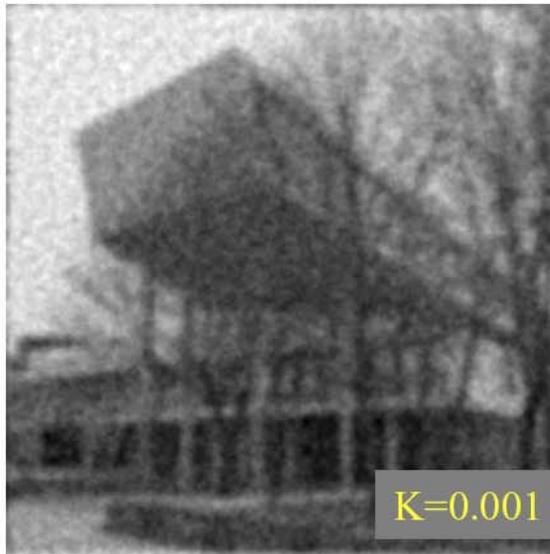
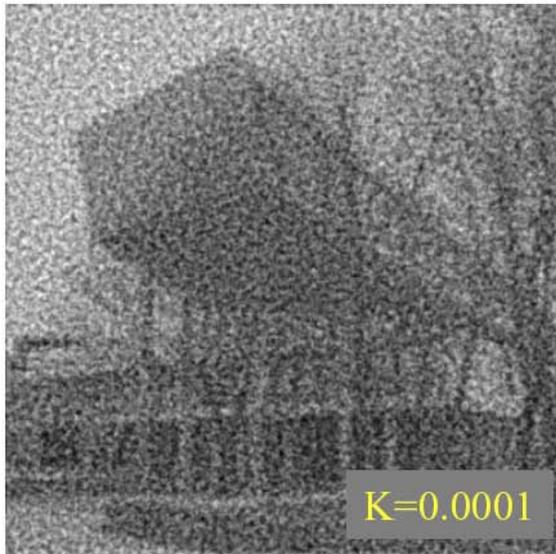
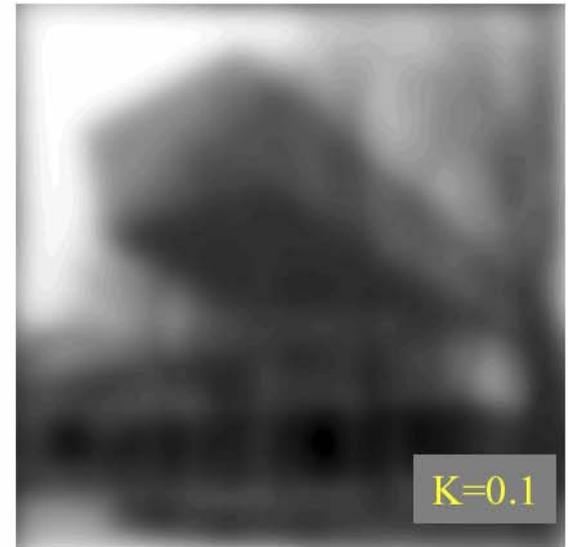
gestörtes Bild



durch Inverse Filterung „restauriert“



(Heuristisches) Wiener Filter



Transformation und Interpolation

Transformation und Interpolation

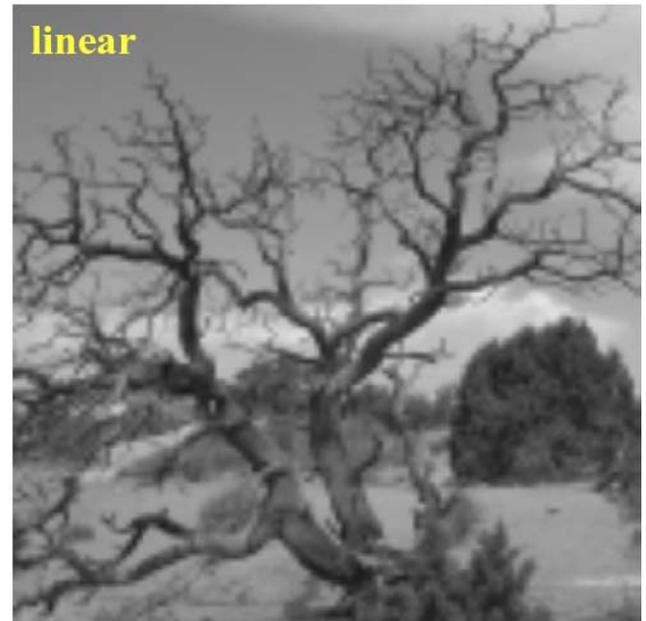
- Die Transformationen Translation, Rotation und Skalierung sind auf reellen Zahlen definiert:

$$Rot_{\alpha} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad Tr_{dx,dy} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + dx \\ y + dy \end{pmatrix}, \quad Sc_s \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

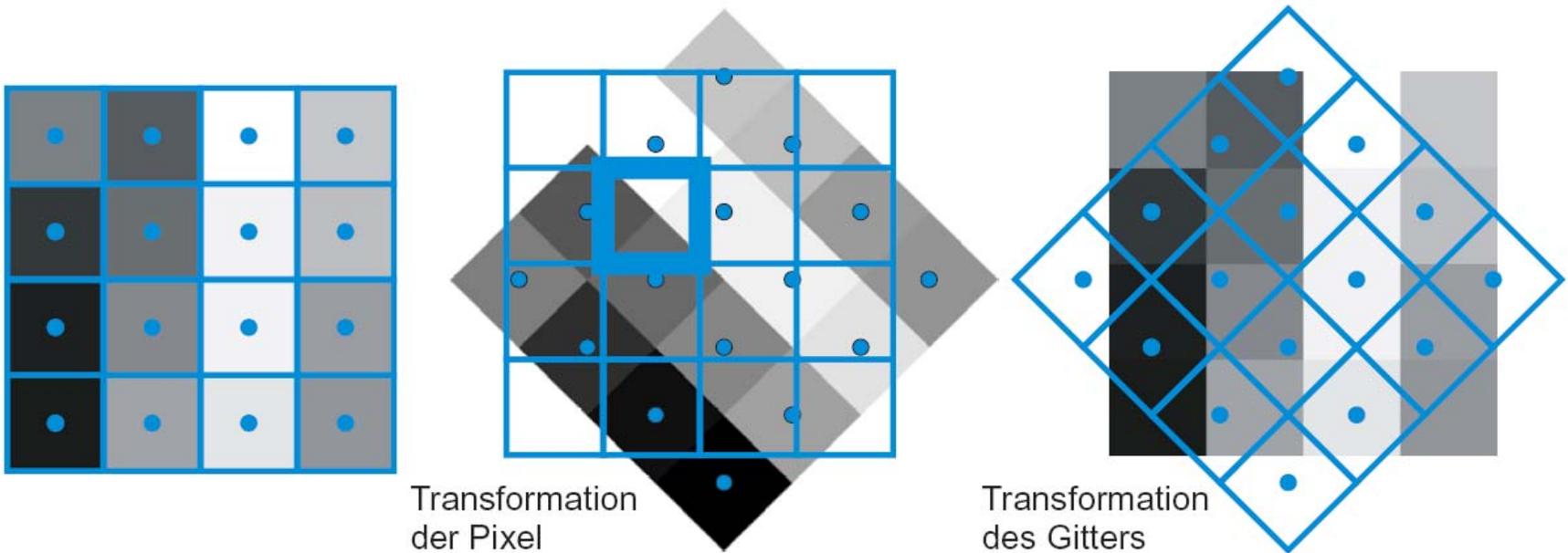
- Digitale Bilder haben einen ganzzahligen Definitionsbereich.
- Nach Transformation ist eine Interpolation notwendig.

Interpolation

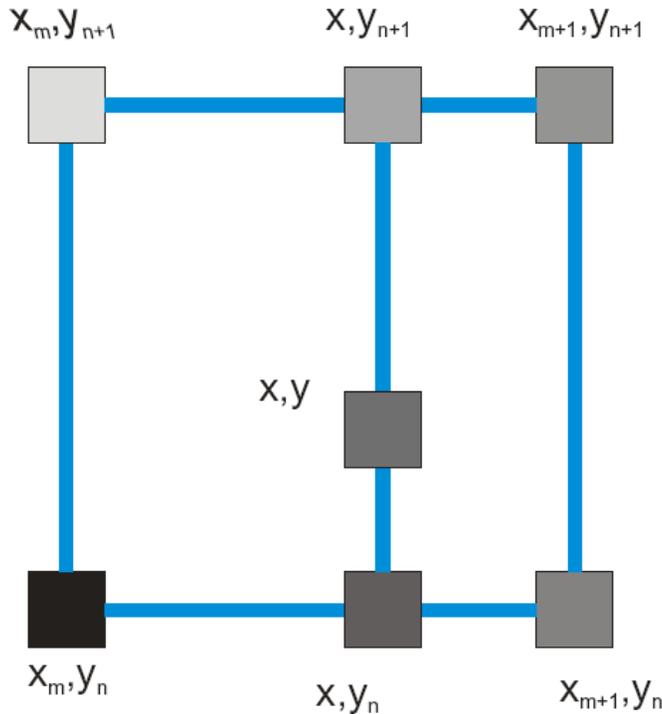
- Konstante Interpolation (Wert des nächsten Nachbarpixels)
- Lineare Interpolation
- Interpolation durch Polynome höheren Grades.
- Interpolation im Frequenzraum.



Konstante Interpolation



Bilineare Interpolation



Erster Schritt:

$$g_1(x_m, y) = \frac{y_{n+1} - y}{y_{n+1} - y_n} f(x_m, y_n) + \frac{y - y_n}{y_{n+1} - y_n} f(x_m, y_{n+1}),$$

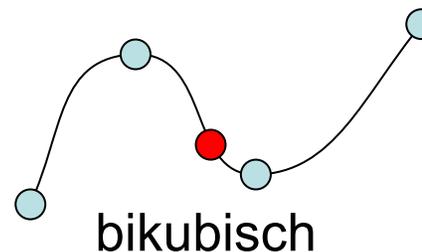
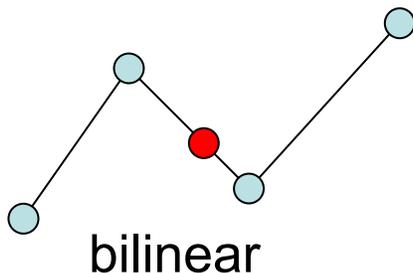
$$g_1(x_{m+1}, y) = \frac{y_{n+1} - y}{y_{n+1} - y_n} f(x_{m+1}, y_n) + \frac{y - y_n}{y_{n+1} - y_n} f(x_{m+1}, y_{n+1}).$$

Zweiter Schritt:

$$g(x, y) = \frac{x_{m+1} - x}{x_{m+1} - x_m} g_1(x_m, y) + \frac{x - x_m}{x_{m+1} - x_m} g_1(x_{m+1}, y).$$

Polynome höheren Grades

- Interpolation der Bildfunktion durch mehr als 2 Stützpunkte
- Polynom n-ten Grades interpoliert n+1 Punkte
- Die Bildfunktion wird besser angenähert, wenn mehr Terme der Taylor-Approximation berücksichtigt werden.
- Ableitungen für die Taylor-Reihe werden durch Differenzen angenähert.
- Grad des Polynoms ist ein Kompromiss zwischen
 - steigender Anzahl berücksichtigter Terme der Taylor-Reihe.
 - steigender Ungenauigkeit der geschätzten Ableitungen.



Interpolation im Frequenzraum

- Die Basisfunktionen der Fouriertransformation haben einen reellen Definitionsbereich.
- Ein Funktionswert kann an beliebiger Stelle (x,y) bestimmt werden durch

$$g_F(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp\left(i2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)$$

- Die Interpolation ist exakt, falls die ursprüngliche Funktion f bandbegrenzt ist (was die meisten Funktionen jedoch nicht sind).

Literatur

- <http://www.jhu.edu/~signals/index.html>
- <http://www.cs.brown.edu/exploratories/>
- Klaus D. Tönnies: "Grundlagen der Bildverarbeitung", ISBN 3-8273-7155-4
- <http://www.pearson-studium.de/main/main.asp?page=booksites/selectchapter&isbn=3827371554&PSZielgruppe=Student>