

# Mathematische Grundlagen zur Spracherkennung

## Tutorium

# Einordnung in den Reigen der Mathematik

Für die Spracherkennung werden folgende Bereiche der Mathematik relevant:

- Stochastik
  - Kombinatorik
  - Statistik
- Analysis
  - Folgen
  - Reihen
  - Komplexe Zahlen
  - Funktionentheorie

# Begriffe der Analysis – Mathematische Folge

- Angeordnete Liste von Zahlen.
- Die Zahlen werden als Folgenglieder bezeichnet.

$$\begin{array}{l} a : \mathbb{N} \rightarrow X \\ \quad i \mapsto a_i \end{array} \quad \text{Funktionsvorschrift } a$$

Eigenschaften unendlicher Folgen:

- Konvergenz
- Ableitung von Differenzierbarkeit und Integralbegriff für Funktionen (Hauptsatz der Analysis)
- Stetigkeit
- Monotonie (steigend / fallend)
- Beschränktheit (obere / untere Schranken)

# Mathematische Folge(2)

- Angabe durch Rekursion

$$a_i = a_{i-2} + a_{i-1} \text{ (Fibonacci Zahlen)}$$

- Beispiele:

- Arithmetische Folgen:  $a_i = 5 + 2i$ ,
- Quadratzahlen :  $a_i = i^2$ ,
- Cauchy-Folge (definiert metrischen Raum)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \in \mathbb{N}, n > N, m > N : d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

- Satz von Bolzano-Weierstraß (Teilfolgen)
- Anwendung für die Spracherkennung:  
→ Sicht der Featurevektoren (Frames) als endliche Folge

# Mathematische Reihe

- Folge der  $n$  ersten Glieder einer anderen Folge
- Aus jeder Folge lässt sich eine Reihe konstruieren:

$$s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

- Summenschreibweise:

$$s_n = \sum_{i=0}^n a_i$$

- Unendliche Reihe: Folge  $(a_j)$  für unendlich viele Indizes definiert.

# Eigenschaften von Reihen

- Konvergenz (Bildung des Limes)

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=0}^n a_i \right)$$

- Häufungspunkte (konvergente Teilfolge)

→ *limsup*, *liminf* (*Maximum*, *Minimum*)

- „Konvergenzkriterien“

- Majorantenkriterium, Minorantenkriterium
- Quotientenkriterium
- Wurzelkriterium
- Leibnizkriterium der alternierenden Reihe

# Mathematische Reihe (2)

- Beispiel

Sinus:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

unendliche trigonometrisch Reihe

# Körper

## → Körperaxiome

- Assoziativität
- Kommutativität
- Neutrale Elemente
  - $x + 0 = x, x \cdot 1 = x$
- Inverses Element
  - $x + (-x) = 0, x \cdot x^{-1} = 1$
- Distributivität
  - $x(y+z) = xy + xz$

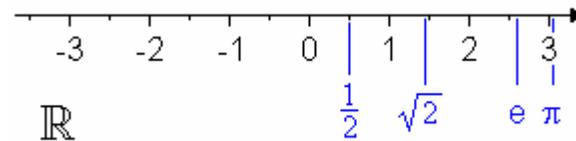
# Komplexe Zahlen

- „*Reelle Zahlen plus i*“ nach Euler
- Erweiterung zur Berechnung der Wurzeln negativer Zahlen durch Imaginärteil
- $x^2 = -1$  hat als Lösung die neue Zahl  $i$
- Darstellung:  $z = a+bi$   
Realteil  $a$ , Imaginärteil  $b$ , Betrag  $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$
- Paarschreibweise:  $(a,b)$
- Paarweise Addition:  $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$
- Neue Multiplikation:  
 $(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$

# Komplexe Zahlen(2)

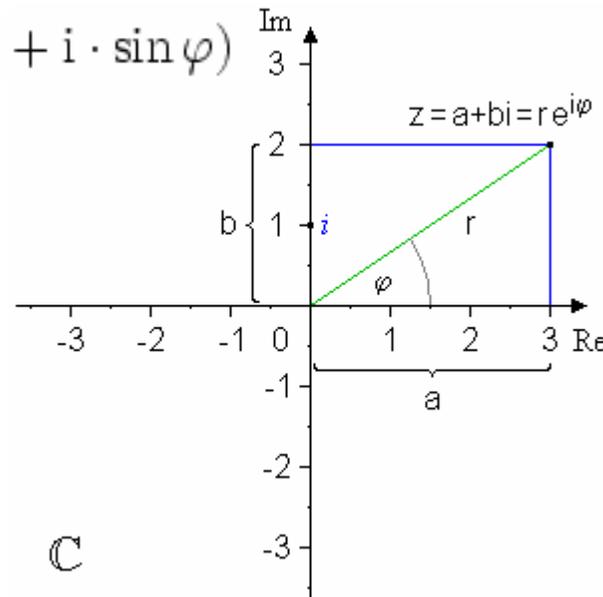
## Darstellung:

- Reelle Zahlen als Gerade



- Komplexe Zahlen als Ebene (Gaußsche Darstellung)

$$z = a + bi = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$



# Komplexe Zahlen(3)

Rechenregeln:

→ [www.komplexe-zahlen.de](http://www.komplexe-zahlen.de)

- „Multipl. und Division“

- „Potenzieren und Radizieren“

# Eulersche Identität

- „Komplexe e-Funktion“

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

- Markante Werte für  $\pi$  und ganz-zahlige Vielfache

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$e^{ix}$	1	$i$	-1	$-i$	1
$\cos x$	1	0	-1	0	1
$\sin x$	0	1	0	-1	0

# Quellen

- Prof. Dr. Rost, Daniel, 2001, Analysis II (für Informatiker), München
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematik>
- <http://www.komplexe-zahlen.de/>
- [http://de.wikipedia.org/wiki/Komplexe\\_Zahl \(Abbildungen\)](http://de.wikipedia.org/wiki/Komplexe_Zahl_(Abbildungen))
- [http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Folgen\\_und\\_Reihen](http://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Folgen_und_Reihen)
- [http://de.wikipedia.org/wiki/Unendliche\\_Reihe](http://de.wikipedia.org/wiki/Unendliche_Reihe)
- [http://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche\\_Identit%C3%A4t](http://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Identit%C3%A4t)
- <http://de.wikipedia.org/wiki/Cauchy-Folge>